ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ДЖАМХУР МАХМУД ИСМАИЛ АЛЬ ОБАИДИ

МЕТОДЫ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ СТЕПЕНИ В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОГО АНАЛИЗА

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор В.В. Обуховский

Воронеж – 2014

Содержание

Введение

Геометрические методы нелинейного анализа, основанные на понятии топологической степени отображения имеют давнюю историю и восходят к именам А. Пуанкаре, Л. Брауэра, П.С. Александрова, Г. Хопфа, Ж. Лере, Ю. Шаудера. В дальнейшем эти методы были развиты и продемонстрировали свою высокую эффективность в трудах. М.А. Красносельского, С.Г. Крейна, Н.А. Бобылева, Ю.Г. Борисовича, П.П. Забрейко, В.Г. Звягина, В.С. Климова, А.И. Петрова, А.И. Половоцкого, Б.Н. Садовского, Ю.И. Сапронова, В.В. Стрыгина, Ф. Браудера (F. Browder), К. Даймлинга (K. Deimling), М. Фури (M. Furi), Л. Ниренберга (L. Nirenberg), Ж. Мавена (J. Mawhin) и других ученых.

Начиная с сороковых годов прошлого века эти методы распространяются на многозначные отображения. Первые работы этого направления, начавшиеся с исследования С. Какутани (S. Kakutani), оперировавшие с выпуклозначными отображениями, нашли свои приложения в теории игр и математической экономике, в теории дифференциальных включений и управляемых систем, в ряде задач нелинейного функционального анализа. Разработке теории топологической степени для многозначных отображений компактного типа с выпуклыми значениями были посвящены труды Ю.Г. Борисовича, Б.Д. Гельмана, А.Д. Мышкиса, В.В. Обуховского, А. Челлины (A. Cellina), А. Гранаса (A. Granas), А. Лясоты (A. Lasota) и других (см. [8]-[11], [35] и имеющуюся там библиографию).

Однако исследование целого ряда аспектов нелинейного функционального анализа, теории дифференциальных уравнений и включений, теории управляемых систем требует распространения этой теории на более широкие классы многозначных отображений.

Достаточно отметить, что ряд важных задач теории управления и динамических систем приводят к необходимости исследовать многозначные отображения с невыпуклыми значениями. В частности, укажем в качестве такого отображения оператор, сопоставляющий начальным данным интегральную воронку дифференциального включения или оператор сдвига по траекториям обобщенной динамической системы.

Изучение многозначных отображений с невыпуклыми (ацикличными) значениями и их неподвижных точек было в работе С. Эйленберга (S. Eilenberg) и Д. Монтгомери(D. Montgomery) [29], где на базе теоремы Л. Виеториса (L. Vietoris) об изоморфизме [40] была доказана теорема Лефшеца о неподвижной точке. В дальнейшем для различных классов отображений такого типа были предложены конструкции топологической степени, получены приложения к теоремам о неподвижной точке и применения к теории дифференциальных уравнений и включений (см., например, [8], [10], [29], [31] и имеющуюся там библиографию).

С другой стороны, для изучения дифференциальных включений в банаховых пространствах весьма эффективным орудием является теория топологической степени некомпактных (уплотняющего типа) многозначных отображений (см., например, [35]).

В настоящей диссертационной работе изучаются различные варианты теории топологической степени для класса псевдоациклических многозначных векторных полей и их приложения к различным теоремам о неподвижной точке, о точке совпадения и к нелокальным краевым задачам нелинейного типа. Отметим, что данный класс включает в себя поля, соответствующие композициям мультиотображений почти ациклического типа с непрерывными однозначными отображениями. Мультиотображения подобного вида возникают при изучении операторов сдвига по траекториям дифференциальных включений и управляемых систем.

В работе определяется топологическая степень для псевдоациклических многозначных векторных полей относительно выпуклого замкнутого множества в локально выпуклом пространстве. Описываются свойства введенной характеристики и даются приложения к теоремам о неподвижной точке и совпадении. Отметим, что понятие относительной топологической степени (вращения) было введено Ю.Г. Борисовичем ([11], [12]) и с тех пор развивалось и применялось во многих работах.

Полученные результаты используются для обоснования конструкции топологической степени псевдоациклических многозначных векторных полей некомпактного типа в локально выпуклом пространстве. Рассматривается класс фундаментально сужаемых полей, включающий в себя многозначные векторные поля, уплотняющие относительно мер некомпактности различных видов. Обосновывается корректность определения степени, описываются ее основные свойства и даются применения к теоремам о неподвижной точке для фундаментально сужаемых и уплотняющих мультиотображений.

Задача о точках совпадения фредгольмовых операторов с многозначными отображениями различных классов возникает при исследовании большого круга задач нелинейного анализа, теории дифференциальных уравнений, теории управляемых систем и других ветвях современной математики. Весьма эффективным средством решения задач такого рода является использование топологических характеристик типа степени совпадения. Для случая однозначных отображений теория степени совпадения восходит к работам [32], [36]. Для включений с линейными фредгольмовыми операторами и различными типами многозначных отображений топологические характеристики такого рода исследовались и применялись в работах [18], [31], [38], [39] и др. Конструкции степени совпадения для многозначных возмущений нелинейных фредгольмовых операторов также предлагались в ряде работ (см., например, монографию [37] и имеющуюся там библиографию).

В настоящей работе, опираясь на полученные результаты определяется топологическая степень совпадения для пары отображений банаховых пространств, состоящей из линейного фредгольмова оператора L нулевого индекса и псевдоациклического многозначного отображения $\mathcal{F}$, уплотняющего относительно L. Обосновывается корректность степени, описываются ее основные свойства и даются приложения к существованию точек совпадения.

В заключительной части работы рассматривается нелокальная граничная задача для полулинейного дифференциального включения в банаховом пространстве. Показано, что эта задача может быть сведена к нахождению точки совпадения линейного фредгольмова оператора и многозначного отображения. Описываются условия, позволяющие применить к этой задаче разработанную степень совпадения. В качестве примера рассматривается разрешимость обобщенной периодической задачи.

Проведем обзор содержания диссертации по главам.

В первой главе диссертации приводятся основные сведения из функционального анализа, теории многозначных отображений и топологических методов. Дано определение класса псевдоациклических многозначных отображений (мультиотображений) следующим образом.

Пусть H обозначает функтор когомологий Александера-Спеньера с целыми коэффициентами (см., напр., [26]).

Непустое пространство X называется 0-ацикличным, если $H^0(X) = \mathbb{Z}$, k-ацикличным ($k \geq 1$), если $H^k(X) = 0$ и ацикличным, если оно k-ациклично для любого $k \geq 0$.

Пусть X, Y – топологические пространства, $K(Y)$ обозначает совокупность всех непустых компактных подмножеств Y, $F : X \to K(Y)$ мультиотображение. Для $i \geq 0$ обозначим

$$M_F^i = \{x|\ x \in X,\ F(x) \text{ не является } i-\text{ацикличным}\}.$$

Полунепрерывное сверху мультиотображение $F : X \to K(Y)$ называется почти ациклическим, если:

(a) $M_F^i = \varnothing$ для всех i, начиная с некоторого $i_0 \geq 0$;

(b) $\xi = \max\limits_{0 \leq i < i_0} (\dim_X M_F^i) < \infty$, где $\dim_X$ обозначает относительную размерность множества в пространстве X.

Если для всех $i \geq 0$ $\quad M_F^i = \varnothing$, то мультиотображение F называется ациклическим.

Мультиотображение $F : X \to K(Y)$ называется псевдоациклическим, если существует топологическое пространство Z и непрерывное отображение $\Theta : Z \to Y$ такое, что F представимо в виде композиции

$$F = \Theta \circ \bar{F},$$

где $\bar{F}: X \to K(Z)$ почти ациклическое мультиотображение. Пара $(\Theta, \bar{F})$ называется разложением псевдоациклического мультиотображения F.

Второй параграф первой главы посвящен конструкции относительной топологической степени псевдоациклических многозначных векторных полей (мультиполей) в следующей ситуации.

Пусть E – хаусдорфово локально выпуклое пространство, $U \subset E$ – выпуклая конечно ограниченная открытая окрестность нуля.

Пусть T – выпуклое замкнутое подмножество E. Обозначим $U_T = U \cap T$.

Рассмотрим $F = \Theta \circ \bar{F}: \partial U \to K(E)$ – псевдоациклическое мультиотображение такое, что:

a) $F(\partial U \cap T) \subseteq T$;

b) $F|_{\partial U \cap T}$ вполне непрерывно;

c) $FixF \cap \partial U \cap T = \varnothing$, где $FixF = \{x : x \in F(x)\}$ – множество неподвижных точек.

С помощью обобщения Е.Г. Скляренко теоремы Виеториса и теоремы В.В. Обуховского и А.Г. Скалецкого о квазиретракции определяется топологическая степень $\gamma_T(\Phi)$ псевдоациклического мультиполя $\Phi = i - F$ относительно множества T.

Устанавливается корректность данного определения, то есть его независимость от выбора квазиретракции и аппроксимирующего конечномерного пространства, участвующих в данной конструкции.

Далее вводится понятие гомотопии псевдоациклических мультиполей относительно множества T.

Пусть $F_0 = \Theta_0 \circ \bar{F}_0$, $F_1 = \Theta_1 \circ \bar{F}_1 : \partial U \to K(E)$ – псевдоациклические мультиотображения такие, что

(a) $F_i(\partial U \cap T) \subset T$;

(b) $F_i|_{\partial U \cap T}$ вполне непрерывно;

(c) $FixF_i \cap \partial U \cap T = \varnothing$; $i = 0, 1$.

Мультиполя $\Phi_0 = i - F_0$, $\Phi_1 = i - F_1$ называются гомотопными относительно T, если существуют почти ациклическое мультиотображение $\bar{F} : \partial U \times [0,1] \to K(Z)$ и непрерывное отображение $\Theta : Z \times [0,1] \to E$ такие, что:

(i) $\bar{F}(\cdot, 0) = \bar{F}_0$, $\bar{F}(\cdot, 1) = \bar{F}_1$;

(ii) $\Theta(\cdot, 0) = \Theta_0$, $\Theta(\cdot, 1) = \Theta_1$;

(iii) для псевдоациклического мультиотображения $\tilde{F} : \partial U \times [0,1] \to K(E)$, заданного как

$$\tilde{F}(x, \lambda) = \Theta(\bar{F}(x, \lambda), \lambda)$$

выполнено:

(1) $\tilde{F}((\partial U \cap T) \times [0,1]) \subseteq T$;

(2) $\tilde{F}|_{(\partial U \cap T) \times [0,1]}$ вполне непрерывно;

(3) $x \notin \tilde{F}(x, \lambda)$ для всех $(x, \lambda) \in (\partial U \cap T) \times [0,1]$.

Ясно, что можно отождествить $\tilde{F}(\cdot, 0) = F_0$, $\tilde{F}(\cdot, 1) = F_1$. Гомотопные относительно T мультиполя обозначаются символом $\Phi_0 \underset{T}{\sim} \Phi_1$.

Важным свойством введенной степени является ее гомотопическая инвариантность:

Если псевдоациклические мультиполя Φ_0 и Φ_1 гомотопны относительно T, то

$$\gamma_T(\Phi_0) = \gamma_T(\Phi_1).$$

Третий раздел первой главы посвящен вычислению топологической степени в некоторых конкретных ситуациях и получению на этой основе некоторых утверждений о неподвижной точке и точке совпадения. Базу подобного рода результатов образует следующая теорема.

(1.3.1) Теорема. Пусть $F : \bar{U} \to K(E)$ – псевдоациклическое мультиотображение такое, что

(a) $F(\bar{U} \cap T) \subset T$;

(b) $F|_{\bar{U} \cap T}$ – вполне непрерывно;

(c) $Fix F \cap \partial U \cap T = \varnothing$.

Если

$$\gamma_T(i - F|_{\partial U}) \neq 0,$$

то существует точка $x_0 \in U \cap T$ такая, что $x_0 \in F(x_0)$.

Этот общий принцип открывает возможности для формулировки различных теорем о неподвижной точке. Справедливо следующее утверждение.

(1.3.2) Теорема. Пусть $\bar{U}_T \neq \varnothing$, $\varphi = i - f : \bar{U} \to E$ – однозначное поле такое, что:

(a) $f(\bar{U}_T) \subset T$;

(b) $f|_{\bar{U}_T}$ – вполне непрерывно;

(c) $Fix\, f \cap \partial U \cap T = \varnothing$;

(d) $\gamma_T(i - f|_{\partial U}) \neq 0$.

Пусть $\Phi = i - F$ – псевдоациклическое мультиполе такое, что:

(i) $F(\bar{U}_T) \subset T$;

(ii) $F|_{\bar{U}_T}$ – вполне непрерывно;

(iii) $Fix\, F \cap \partial U \cap T = \varnothing$.

Предположим далее, что

$$(\mathbf{1.3.3}) \qquad \mu\varphi(x) \notin \Phi(x) \text{ для всех } \mu < 0, x \in \partial U \cap T.$$

Тогда найдется точка $x \in \bar{U}_T$ такая, что $x \in F(x)$.

Следствиями этого утверждения являются аналогии классических теорем о неподвижной точке Шефера о Роте.

Те же методы позволяют доказать следующую теорему о совпадении типа Пуанкаре.

(1.3.6) Теорема. Пусть $T \subset E$ – конус с вершиной в нуле. Пусть $\varphi = i - f : \bar{U} \to E$ – однозначное поле такое, что условия (a), (b), (c), (d) теоремы 1.3.2 выполнены. Пусть $\Phi = i - F : \bar{U} \to K(E)$ – псевдоациклическое мультиполе, удовлетворяющее условиям (i), (ii), (iii) той же теоремы.

(1.3.7) Предположим далее, что $\mu\varphi(x) \notin F(x)$ для всех $\mu > 1$, $x \in \partial U \cap T$. Тогда найдется точка $x \in \bar{U}_T$ такая, что $\varphi(x) \in F(x)$.

Завершает первую главу рассмотрение эквивалентных и нечетных мультиполей.

Пусть $d : E \to E$ – непрерывный линейный оператор, удовлетворяющий следующим условиям:

$$d^k = id_E, k \geq 2;$$

если $L = Fix\, d$, то

$$d^i(y) \neq y, y \notin L, i \not\equiv 0 (mod\, k),$$

то есть d является полусвободным периодическим оператором порядка k.

Пусть U, как и прежде, выпуклая конечно ограниченная окрестность нуля, $S = \partial U$ и пусть $d(S) = S$.

Мультиотображение $F : S \to K(E)$ называется эквивариантным относительно d, если

$$F \circ d = d \circ F.$$

При некоторых дополнительных предположениях справедливо следующее утверждение.

(1.3.9) Теорема. Пусть $F : S \to K(E)$ – псевдоациклическое мультиотображение, эквивариантное относительно периодического оператора d периода k. Пусть T – выпуклое замкнутое подмножество E такое, что $d(T) = T$ и $T \cap L \neq \varnothing$ в случае, если $L \neq 0$ и $T \cap \bar{U} \neq \varnothing$.

Пусть $F(\partial U \cap T) \subset T$, $F|_{\partial U \cap T}$ – вполне непрерывно, $Fix\, F \cap \partial U \cap T = \varnothing$. Тогда

$$\gamma_T(i - F) \equiv \gamma_{T \cap L}(i - F_L)(mod\, k), \text{если}\, L \neq 0,$$

$$\gamma_T(i - F) \equiv 1(mod\, k), \text{если}\, L = 0.$$

Следствием этого результата является теорема о нечетном поле для псевдоациклического мультиотображения.

Вторая глава диссертации посвящена введению топологической степени и изучению ее приложений для некоторых классов некомпактных псевдоациклических мультиотображений.

Пусть $X \subseteq E$. Выпуклое замкнутое множество $T \subseteq E$ называется фундаментальным для мультиотображения $F : X \to K(E)$ (или соответствующего ему мультиполя $\Phi = i - F$), если:

1) $F(X \cap T) \subseteq T$;

2) из $x_0 \in \overline{co}(F(x_0) \cup T)$ следует $x_0 \in T$.

Фундаментальное множество T мультиотображения $F : X \to K(E)$ или семейства мультиотображений $G : X \times \Lambda \to K(E)$ такое, что $X \cap T \neq \varnothing$ и сужение F на $X \cap T$ (соответственно, G на $(X \cap T) \times \Lambda$) компактно, называется существенным.

Если мультиотображение $F : X \to K(E)$ или семейство мультиотображений $G : X \times \Lambda \to K(E)$ обладает существенным фундаментальным множеством, то F или, соответственно, G называется вполне фундаментально сужаемым (на T). Этим же термином называется и соответствующее мультиполе $\Phi(x) = x - F(x)$ или семейство мультиполей $\Phi(x, \lambda) = x - G(x, \lambda)$.

Примерами вполне фундаментально сужаемых мультиотображений являются компактные и уплотняющие относительно монотонных несингулярных мер некомпактности мультиотображения.

Пусть U – открытое выпуклое конечно ограниченное подмножество локально выпуклого пространства E; $F = \Theta \circ \widetilde{F} : \bar{U} \to K(E)$ – вполне фундаментально сужаемое псевдоациклическое мультиотображение такое, что

$$x \notin F(x)$$

для всех $x \in \partial U$.

Топологической степенью мультиполя $\Phi = i - F$, соответствующего F, называется топологическая степень мультиполя Φ относительно произвольного существенного фундаментального множества T:

$$\gamma(\Phi, \bar{U}) := \gamma_T(\Phi, \bar{U}).$$

Доказывается корректность этого определения, то есть его независимость от выбора существенного фундаментального множества T. Описываются основные свойства введенной характеристики, включая ее инвариантность. Связь топологической степени с неподвижными точками раскрывает следующее утверждение.

(2.2.7) Теорема. Пусть для вполне фундаментально сужаемого псевдоациклического мультиотображения $F : \bar{U} \to K(E)$ такого, что $x \notin F(x)$ для всех $x \in \partial U$ выполнено

$$\gamma(i - F, \bar{U}) \neq 0.$$

Тогда $\varnothing \neq FixF \subset U$.

Из этого общего утверждения вытекает следующая теорема о неподвижной точке.

(2.2.8) Теорема. Пусть однозначное отображение $f : \bar{U} \to E$ и псевдоациклическое мультиотображение $F : \bar{U} \to K(E)$ вполне фундаментально сужаемы на существенное фундаментальное множество T и не имеют неподвижных точек на ∂U. Пусть, далее

1) $\gamma_T(i - f, \bar{U}) \neq 0$;

2) $\mu\varphi(x) \notin \Phi(x)$ для всех $\mu < 0$, $x \in \partial U$, где $\Phi = i - F$, $\varphi = i - f$.

Тогда $\varnothing \neq FixF \subset U$.

Приведем ее аналог для уплотняющих мультиотображений. Пусть E – нормированное пространство и U ограничено.

(2.2.9) Теорема. Пусть непрерывное однозначное отображение $f : \bar{U} \to E$ и псевдоациклическое мультиотображение $F : \bar{U} \to K(E)$ являются (k, β)-уплотняющими относительно вещественной, монотонной, несингулярной, правильной и полуаддитивной МНК β и не имеют неподвижных точек на ∂U. Если $\gamma(i - f, \bar{U}) \neq 0$ и выполнено условие (2) предыдущей теоремы, то $\varnothing \neq FixF \subset U$.

В качестве следствия отметим следующие утверждения.

(2.2.10) Следствие (Теорема Шефера). Пусть псевдоациклическое мультиотображение $F : \bar{U} \to K(E)$ является (k, β)-уплотняющим относительно вещественной, монотонной, несингулярной, правильной и полуаддитивной МНК β. Пусть

$$\mu x \notin F(x) \text{ для всех } \mu > 1, x \in \partial U.$$

Тогда $\varnothing \neq FixF \subset \bar{U}$.

(2.2.11) Следствие (Теорема Роте). Пусть мультиотображение $F : \bar{U} \to K(E)$ – такое же как в (2.2.10). Если

$$F(\partial U) \subset \bar{U},$$

то $\varnothing \neq FixF \subset \bar{U}$.

Третья глава работы посвящена конструкции топологической степени совпадения линейного фредгольмова оператора L нулевого индекса и псевдоациклического мультиотображения, которое является уплотняющим относительно L.

Пусть E_1, E_2 – банаховы пространства. Линейный оператор $L : DomL \subseteq E_1 \to E_2$ называется линейным фредгольмовым оператором нулевого индекса, если ImL – замкнутое подмножество E_2, пространства $KerL$ и $CokerL = E_2/ImL$ конечномерны и

$$dimKerL = dimCokerL.$$

Для линейного фредгольмова оператора L нулевого индекса:

а) существуют линейные непрерывные операторы проектирования $P: E_1 \to E_1$ и $Q: E_2 \to E_2$ такие, что $ImP = KerL$ и $KerQ = ImL$;

б) оператор $L_P : DomL \cap KerP \to ImL$,

$$L_p(x) = L(x) \text{ для } x \in DomL \cap KerP$$

является линейным изоморфизмом;

в) оператор $K_P : ImL \to DomL \cap KerP$,

$$K_p(x) = L_P^{-1}$$

непрерывен;

г) каноническая проекция $\Pi : E_2 \to CokerL$, заданная как

$$\Pi y = y + ImL,$$

является непрерывным оператором;

д) существует линейный непрерывный изоморфизм $\Lambda : CokerL \to KerL$;

е) уравнение

$$Lx = y,\ y \in E_2$$

эквивалентно уравнению

$$(i - P)x = (\Lambda\Pi + K_{P,Q})(y),$$

где i – тождественный оператор на E_1, а оператор $K_{P,Q} : E_2 \to E_1$ задан как

$$K_{P,Q}(y) = K_P(y - Qy).$$

Пара (P, Q) называется точной парой проекций, отвечающих оператору L.

Пусть $U \subset E_1$ – открытое выпуклое ограниченное множество; β – мера некомпактности в E_1.

Псевдоациклическое мультиотображение $\mathcal{F} : \bar{U} \to K(E_2)$ называется (L, β)-уплотняющим, если:

(i) множество $\mathcal{F}(\bar{U})$ ограничено в E_2;

(ii) мультиотображение

$$K_{P,Q} \circ \mathcal{F} : \bar{U} \to K(E_1)$$

является β-уплотняющим.

Точка $x \in DomL \cap \bar{U}$ называется точкой совпадения пары $(L, \mathcal{F})$, если

$$Lx \in \mathcal{F}(x).$$

Множество всех точек совпадения пары $(L, \mathcal{F})$ обозначается $Coin(L, \mathcal{F}, \overline{U})$.

Рассматривается мультиотображение $\mathcal{G} : \bar{U} \to K(E_1)$ вида

$$\mathcal{G}(x) = Px + (\Lambda\Pi + K_{P,Q}) \circ \mathcal{F}(x).$$

Основные свойства мультиотображения $\mathcal{G}$ заключаются в следующем:

а) Мультиотображение $\mathcal{G}$ является β-уплотняющим псевдоациклическим мультиотображением.

б) $Fix\mathcal{G} = Coin(L, \mathcal{F}, \overline{U})$.

Обозначим $S^L(\bar{U}, E_2)$ совокупность всех (L, β)-уплотняющих псевдоациклических мультиотображений $\mathcal{F} : \bar{U} \to K(E_2)$.

Выделим в $S^L(\bar{U}, E_2)$ подкласс $S^L_{\partial U}(\bar{U}, E_2)$, состоящий из всех таких мультиотображений $\mathcal{F}$, для которых

$$Coin(L, \mathcal{F}, \bar{U}) \cap (\partial U \cap DomL) = \varnothing.$$

Степенью совпадения

$$deg(L, \mathcal{F}, \bar{U})$$

пары $(L, \mathcal{F})$, где $\mathcal{F} \in S^L_{\partial U}(\bar{U}, E_2)$, называется топологическая степень $deg(i - \mathcal{G}, \bar{U})$ мультиполя $i - \mathcal{G}$.

Устанавливается корректность данного определения, то есть его независимость от выбора точной пары проекций (P, Q) и изоморфизма Λ (с точностью до его ориентации).

Непосредственно из определения вытекает следующий общий принцип существования точки совпадения.

(3.3.1) Теорема. Если

$$deg(L, \mathcal{F}, \bar{U}) \neq 0,$$

то

$$\varnothing \neq Coin(L, \mathcal{F}, \bar{U}) \subset U.$$

Вводится понятие гомотопии (L, β)-уплотняющих мультиотображений и устанавливается свойство гомотопической инвариантности степени совпадения.

Рассматриваются некоторые применения введенной характеристики к задаче о точках совпадения пары $(L, \mathcal{F})$.

Справедлив следующий вариант теоремы о нечетном поле.

(3.3.4) Теорема. Пусть область U симметрична относительно нуля, мультиотображение $\mathcal{F}$ нечетно на ∂U, то есть

$$\mathcal{F}(-x) = -\mathcal{F}(x) \text{ для всех } x \in \partial U.$$

Тогда степень совпадения

$$deg(L, \mathcal{F}, \bar{U})$$

нечетна и, следовательно,

$$\varnothing \neq Coin(L, \mathcal{F}, \bar{U}) \subset U \cap DomL.$$

Доказывается также следующая теорема о продолжении.

(3.3.5) Теорема. Пусть $\mathcal{F} : \bar{U} \to K(E_2)$ – (L, β)-уплотняющее псевдоациклическое мультиотображение такое, что

(i) $Lx \notin \lambda\mathcal{F}(x)$ для всех $x \in DomL \cap \partial U, \lambda \in (0, 1]$;

(ii) $0 \notin \Pi\mathcal{F}(x)$ для всех $x \in KerL \cap \partial U$;

(iii) $deg_{KerL}(\Lambda\Pi\mathcal{F}|_{U_{KerL}}, \bar{U}_{KerL}) \neq 0$.

Тогда

$$\varnothing \neq Coin(L, \mathcal{F}, \bar{U}) \subset (U \cap DomL).$$

В завершении главы рассматривается теорема о точке совпадения, являющаяся аналогом теоремы Б.Н. Садовского о неподвижной точке. Это утверждение доказывается для несколько более узкого класса мультиотображений.

(3.3.9) Теорема. Пусть пространство E_1 сепарабельно, множество U симметрично относительно нуля, $\mathcal{F} : \bar{U} \to K(E_2)$ – (L, β)-уплотняющее псевдо-R_δ-мультиотображение, удовлетворяющее следующему граничному условию:

$$(L - \mathcal{F})(-x) \cap \mu(L - \mathcal{F})(x) = \varnothing$$

для всех $x \in \partial U, \mu \geq 0$.

Тогда степень $deg(L, \mathcal{F}, \bar{U})$ нечетна и, следовательно,

$$\varnothing \neq Coin(L, \mathcal{F}, \bar{U}) \subset U \cap DomL.$$

В четвертой главе обсуждаются возможности применения построенной в предыдущей главе теории к изучению следующей задачи.

Рассматриваются полулинейное дифференциальное включение в сепарабельном банаховом пространстве E

$$(\mathbf{4.1.1}) \qquad y'(t) \in Ay(t) + F(t, y(t)), \qquad t \in [0, T]$$

вместе с нелокальным граничным условием следующего вида

$$(\mathbf{4.1.2}) \qquad Ly(0) = \varphi(y),$$

где $L : DomL \subseteq E \to E$ - линейный фредгольмов оператор нулевого индекса, $\varphi : C([0,T]; E) \to E$ - непрерывное отображение.

Предполагается, что линейная часть включения (4.1.1) удовлетворяет условию

A) $A : DomA \subseteq E \to E$ - замкнутый линейный оператор, порождающий C_0-полугруппу $e^{At},\ t \geq 0$.

Для многозначной нелинейности $F : [0, T] \times E \to Kv(E)$ выполнены условия:

$F1$) мультифункция $F(\cdot, x) : [0, T] \to Kv(E)$ обладает измеримым сечением для каждого $x \in E$;

$F2$) мультиотображение $F(t, \cdot) : E \to Kv(E)$ полунепрерывно сверху для п.в. $t \in [0, T]$;

$F3$) существует функция $\alpha \in L^1_+([0, T])$ такая, что

$$\|F(t, x)\| := \sup\{\|z\| : z \in F(t, x)\} \leq \alpha(t)(1 + \|x\|)$$

для п.в. $t \in [0, T]$.

Следующее предположение называется условием χ-регулярности:

$F4)$ существует функция $k(\cdot) \in L^1_+([0,T])$ такая, что

$$\chi(F(t,D)) \leq k(t) \cdot \chi(D) \quad \text{a.e. } t \in [0,T]$$

для любого ограниченного множества $D \subset E$, где χ - мера некомпактности Хаусдорфа в E.

Отметим, что частными случаями граничного условия (4.1.2) являются обобщенные периодические задачи

$$\textbf{(4.1.3)} \qquad Ly(0) = \psi(y(T)),$$

где $\psi : E \to E$ - некоторое непрерывное отображение и

$$\textbf{(4.1.4)} \qquad Ly(0) = y(T).$$

Рассматриваются интегральные решения включения (4.1.1), т.е. непрерывные функции $y : [0,T] \to E$ вида

$$y(t) = e^{At}y(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s) ds,$$

где $f(s) \in F(s, y(s))$ п.в. $s \in [0,T]$ - суммируемое сечение.

Задача (4.1.1) – (4.1.2) сводится к нахождению решения $x \in E$ включения

$$Lx \in \varphi(\Sigma(x)),$$

или, иначе говоря, отысканию точки совпадения оператора L и мультиотображения $\varphi \circ \Sigma$. Здесь $\Sigma(x)$ – мультиотображение, сопоставляющее каждому $x \in E$ множество всех интегральных решений $y(\cdot)$ включения (4.1.1), удовлетворяющих условию $y(0) = x$.

Справедлив следующий общий принцип разрешимости задачи (4.1.1) – (4.1.2).

(4.2.5) Теорема. Пусть мультиотображение $\varphi \circ \Sigma : \overline{U} \to K(E)$ является (L, β)-уплотняющим и $deg(L, \varphi \circ \Sigma, \overline{U}) \neq 0$. Тогда нелокальная граничная задача (4.1.1) – (4.1.2) имеет решение. ■

Описываются достаточные условия того, чтобы мультиотображение $\varphi \circ \Sigma$ было (L, β)-уплотняющим. При выполнении такого рода условий справедливо, например, следующее утверждение.

(4.2.7) Теорема. Пусть $U \subset E$ – выпуклое открытое ограниченное множество; $P_T : E \to K(E)$ – мультиоператор сдвига по траекториям включения (4.1.1), удовлетворяющий следующим условиям:

$P1)$ для любого $x \in DomL \cap \partial U$:

$$P_T(x) \cap \{\mu Lx : \mu \geq 1\} = \varnothing;$$

$P2)$ $0 \notin \Pi P_T(x)$ для всех $x \in KerL \cap \partial U$;

$P3)$ $deg_{KerL}(\Lambda \Pi P_T|_{\overline{U}_{KerL}}, \overline{U}_{KerL}) \neq 0$, где последнее выражение представляет собой топологическую степень мультиполя, вычисляемую в конечномерном пространстве $KerL$.

Тогда существует решение $y(\cdot)$ обобщенной периодической задачи (4.1.1), (4.1.4) такое, что $y(0) \in U \cap DomL$.

Суммируя вышеизложенное, отметим, что в диссертационной работе получены следующие новые результаты.

1. Построена и изучена топологическая степень для класса псевдоациклических многозначных мультиотображений относительно выпуклого замкнутого подмножества в локально выпуклом пространстве.

2. С помощью вычисления топологической степени доказаны теоремы о неподвижной точке и совпадении для псевдоациклических многозначных отображений, обобщающих классические результаты Шефера, Роте и Пуанкаре.

3. Вычислена топологическая степень эквивариантных и нечетных псевдоациклических многозначных векторных полей.

4. Построена и изучена топологическая степень для класса фундаментально сужаемых псевдоациклических многозначных отображений в локально выпуклом пространстве.

5. С помощью метода топологической степени доказаны теоремы о неподвижной точке для фундаментально сужаемых и уплотняющих псевдоациклических многозначных отображений.

6. Построена и изучена топологическая степень совпадения для пары, состоящей из линейного фредгольмова оператора L нулевого индекса и псевдоациклического многозначного отображения, уплотняющего относительно L.

7. Топологическая степень совпадения использована для доказательства теорем о совпадении линейного фредгольмова и псевдоациклического многозначного отображения.

8. Исследованы возможности применения степени совпадения к нелокальной граничной задаче для полулинейного дифференциального включения в банаховом пространстве.

Материалы диссертации докладывались на Воронежской весенней математической школе "Понтрягинские чтения XXIV" – Воронеж, 2013; Международной конференции "Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна" – Воронеж, 2014; Воронежской весенней математической школе "Понтрягинские чтения XXV" – Воронеж, 2014; Международной открытой конференции "Современные проблемы анализа динамических систем, приложения в технике и технологиях" – ВГЛТА 18-19 июня Воронеж, 2014; Международном молодежном симпозиуме "Современные проблемы математики. Методы, модели, приложения" – ВГЛТА 18-19 ноября Воронеж, 2014; на международных научно-методических конференциях студентов, аспирантов и преподавателей кафедры высшей математики ВГПУ (Воронеж, 2013, 2014), а также на семинаре проф. Обуховского В.В.

Результаты диссертации опубликованы в работах [2]-[9]. Из совместно опубликованных работ [3], [4], [9] в диссертацию включены результаты, принадлежащие лично автору.

Работы [2]-[4] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.

Автор глубоко признателен профессору В.В. Обуховскому за научное руководство и постоянное внимание.

Глава 1. Топологическая степень для псевдоациклических многозначных векторных полей

1 Основные понятия и определения

Пусть H обозначает функтор когомологий Александера-Спеньера с целыми коэффициентами (см., напр., [26]).

Непустое пространство X называется 0-ацикличным, если $H^0(X) = \mathbb{Z}$, k-ацикличным ($k \geq 1$), если $H^k(X) = 0$ и ацикличным, если оно k-ациклично для любого $k \geq 0$.

Пусть A – подпространство топологического пространства X.

(1.1.1) Определение. (см. [1]) Относительной размерностью A в X ($\dim_X A$) называется величина $\sup\limits_{C \subset A} \dim C$, где C – замкнуто в X и $\dim C$ обозначает топологическую размерность C.

По определению полагаем, что $\dim_X A = -\infty$ в том и только в том случае, если $A = \varnothing$.

Непрерывное отображение $f : Y \to X$ называется собственным, если прообраз $f^{-1}(A)$ любого компактного множества $A \subset X$ компактен.

В дальнейших конструкциях существенную роль будет играть следующее обобщение теоремы Виеториса-Бегла ([28], [40]), предложенное Е.Г. Скляренко ([25]):

(1.1.2) Теорема. Пусть X, Y – паракомпактные топологические пространства, $f : Y \to X$ собственное и сюръективное непрерывное отображение,

$$M_f^i = \{x |\ x \in X,\ f^{-1}(x) \text{ не является } i-\text{ацикличным}\}.$$

Пусть $n = 1 + \max\limits_{i \geq 0}(\dim_X M_f^i + i)$. Тогда для любого $k > n$ индуцированный гомоморфизм $f^{*\,k} : H^k(X) \to H^k(Y)$ является изоморфизмом. ■

(1.1.3) Замечание. Если $M_f^i = \varnothing$ для любого $i \geq 0$, то $\dim_X M_f^i = -\infty$ и из теоремы 1.1.2 следует, что $f^* : H^k(X) \to H^k(Y)$ – изоморфизм для любого $k \geq 0$. Это составляет содержание классической теоремы Виеториса-Бегла.

(1.1.4) Определение. Отображение $p : Y \to X$ называется n-виеторисовским, если выполнены следующие два условия:

(i) p собственное и сюръективное отображение,

(ii) $\dim_X M_p^i \leq n - 2 - i$ для любого $i \geq 0$.

Отметим, что из теоремы 1.1.2 вытекает, что если $p : Y \to X$ – n-виеторисовское отображение, то $p^{*\,k} : H^k(X) \to H^k(Y)$ – изоморфизм для всех $k \geq n$.

(1.1.5) Лемма. Если $p : Y \to X$ – n-виеторисовское отображение и $A \subset X$ – замкнуто, то отображение $\tilde{p} : p^{-1}(A) \to A$ – n-виеторисовское отображение, где $\tilde{p}$ определяется следующим образом:

$$\tilde{p}(y) = p(y), \forall y \in p^{-1}(A). \blacksquare$$

(1.1.6) Определение. Пусть X – топологическое пространство, A и B – подпространства X. Обозначим $i : (A, A \cap B) \to (X, B)$ и $j : (B, A \cap B) \to (X, A)$ – отображения вложения. Тройка (X, A, B) называется k-триадой, $k \geq 0$, если

(i) $X = A \cup B$ и

(ii) $i^{*\,l} : H^l(X, B) \to H^l(A, A \cap B)$ и $j^{*\,l} : H^l(X, A) \to H^l(B, A \cap B)$ – изоморфизмы для любого $l \geq k + 1$. Если (X, A, B) – 0-триада, то

(X, A, B) называется просто триадой.

(1.1.7.) Теорема Майера-Виеториса. Пусть (X, A, B) – k-триада. Тогда следующая последовательность

$$H^k(A \cap B) \xrightarrow{\Delta} H^{k+1}(X) \xrightarrow{\alpha} H^{k+1}(A) \oplus H^{k+1}(B) \xrightarrow{\beta} \\ \xrightarrow{\beta} H^{k+1}(A \cap B) \longrightarrow \quad ...,$$

в которой Δ, α, β – гомоморфизмы Майера-Виеториса, точна.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы Майера-Виеториса для триад (см. [27]). ■

Пусть E – хаусдорфово локально выпуклое пространство, $E^{k+1} \subset E^{k+2}$ – подпространства E, $\dim E^{k+1} = k+1$, $\dim E^{k+2} = k+2$

Обозначим E_+^{k+2} и E_-^{k+2} – два замкнутых полупространства E^{k+2} такие, что $E^{k+1} = E_+^{k+2} \cap E_-^{k+2}$.

(1.1.8) Определение. Подмножество X локально выпуклого пространства E называется конечно ограниченным, если пересечение X с любым конечномерным подпространством E ограничено.

Пусть U – выпуклая конечно ограниченная открытая окрестность нуля в E. Обозначим через $S = \partial U$ границу U.

$$S_+^{k+1} = E_+^{k+2} \cap S,\ S_-^{k+1} = E_-^{k+2} \cap S,$$

$$S^k = S \cap E^{k+1} = S_+^{k+1} \cap S_-^{k+1}.$$

Заметим, что $(S^{k+1}, S_+^{k+1}, S_-^{k+1})$ – триада и гомоморфизм Майера-Виеториса. $\Delta : H^k(S^k) \to H^{k+1}(S^{k+1})$ – изоморфизм.

(1.1.9) Лемма. (см. [26]) Пусть $t, r : Y \to S^{k+1}$ – два непрерывных отображения такие, что:

(i) t – n-виеторисовское отображение, $n \leq k$;

(ii) $rt^{-1}(S_+^{k+1}) \subset S_+^{k+1}$ и

(iii) $rt^{-1}(S_-^{k+1}) \subset S_-^{k+1}$.

Тогда следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} H^k(S^k) & \xrightarrow{\Delta} & H^{k+1}(S^{k+1}) \\ {\scriptstyle (\bar{t}^{*\,k})^{-1}\bar{r}^{*\,k}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (t^{*\,k+1})^{-1}r^{*\,k+1}} \\ H^k(S^k) & \xrightarrow{\Delta} & H^{k+1}(S^{k+1}) \end{array}$$

где $\bar{t}, \bar{r} : t^{-1}(S^k) \to S^k$ – сужения отображений t и r соответственно.

Доказательство. Пусть $Y_+ = t^{-1}(S_+^{k+1})$, $Y_- = t^{-1}(S_-^{k+1})$. Тогда из леммы 1.1.5 и теоремы 1.1.2 заключаем, что тройка (Y, Y_+, Y_-) – k-триада, $Y_+ \cap Y_- = t^{-1}(S^k)$.

Из предположений (i) и (ii) получаем, что t, r – отображения из k-триады (Y, Y_+, Y_-) в k-триаду $(S^{k+1}, S_+^{k+1}, S_-^{k+1})$. Окончательно, из естественности теоремы Майера-Виеториса для k-триад мы получаем требуемое утверждение. ■

Мы будем использовать также следующую теорему о квазиретракции, доказанную В.В. Обуховским и А.Г. Скалецким (см. [23]):

(1.1.10.) Теорема. Если N – предкомпактное подмножество локально выпуклого пространства E и p – непрерывная полунорма в E, то существует конечномерное подпространство $E' \subset E$, $E' \cap N \neq \varnothing$ и непрерывное отображение $\rho_p : E \to E' \cap \overline{co}N$, называемое квазиретракцией, такое, что $p(x - \rho_p(x)) < 1$ для любого $x \in N$. ■

Напомним некоторые сведения из теории многозначных отображений (см., напр., [**?**]).

Обозначим $P(Y)$ совокупность всех непустых подмножеств множества Y. Многозначное отображение (кратко мультиотображение) F множества X в множество Y – это соответствие, сопоставляющее каждой точке $x \in X$ непустое подмножество $F(x) \subseteq Y$, называемое образом точки x, то есть это однозначное отображение $F : X \to P(Y)$.

Пусть $F : X \to P(Y)$ – некоторое мультиотображение. Если $A \subseteq X$, то множество $F(A) = \bigcup\limits_{x \in A} F(x)$ называется образом A при мультиотображении F. Если $D \subseteq Y$, то множество

$$F^{-1}(D) = \{x|\ x \in X,\ F(x) \subseteq D\}$$

называется малым прообразом множества D при мультиотображении F.

Множество $\Gamma_F \subseteq X \times Y$,

$$\Gamma_F = \{(x, y)|\ x \in X,\ y \in F(x)\}$$

называется графиком мультиотображения $F : X \to P(Y)$. С каждым мультиотображением $F : X \to P(Y)$ мы свяжем следующую диаграмму однозначных отображений:

$$X \xleftarrow{\ t\ } \Gamma_F \xrightarrow{\ r\ } Y,$$

где t и r – естественные проекции: $t(x, y) = x$, $r(x, y) = y$.

Пусть $X \subseteq Y$; точка $x \in X$ называется неподвижной точкой мультиотображения $F : X \to P(Y)$, если $x \in F(x)$. Множество всех неподвижных точек мультиотображения F обозначается $FixF$.

Пусть X, Y – топологические пространства.

(1.1.11) Определение. Мультиотображение $F : X \to P(Y)$ называется полунепрерывным сверху, если $F^{-1}(V)$ открыто для любого открытого подмножества $V \subseteq Y$.

Обозначим через $C(Y)$ совокупность всех непустых замкнутых подмножеств пространства Y, а через $K(Y)$ совокупность всех непустых компактных подмножеств пространства Y.

(1.1.12) Определение. Мультиотображение $F : X \to C(Y)$ называется замкнутым, если его график $\Gamma_F = \{(x,y) : y \in F(x)\}$ – замкнутое подмножество в $X \times Y$.

Справедливо следующее утверждение (см. [**?**]):

(1.1.13) Лемма. Если пространство Y хаусдорфово, то всякое полунепрерывное сверху мультиотображение $F : X \to K(Y)$ замкнуто. ■

(1.1.14) Определение. Мультиотображение $F : X \to K(Y)$ называется компактным, если образ $F(X)$ относительно компактен в Y (то есть $\overline{F(X)}$ – компактно). Компактное и полунепрерывное сверху мультиотображение называется вполне непрерывным.

Пусть теперь Y – хаусдорфово топологическое векторное пространство, $X \subseteq Y$. Всякое мультиотображение $F : X \to P(Y)$ определяет мультиотображение $\Phi : X \to P(Y)$, $\Phi(x) = x - F(x)$, называемое многозначным векторным полем (кратко мультиполем), соответствующим F. Обозначая $i : X \to Y$ отображение вложения, будем записывать $\Phi = i - F$. Точка $x \in X$ такая, что $0 \in \Phi(x)$, называется особой точкой мультиполя Φ. Ясно, что особые точки мультполя $\Phi = i - F$ являются неподвижными точками мультиотображения F и обратно. Если $FixF = \varnothing$, то $\Phi = i - F$ невырождено, то есть $\Phi : X \to P(Y \backslash 0)$.

Пусть L – компактное топологическое пространство. Вполне непрерывное мультиотображение $G : X \times L \to K(Y)$ определяет семейство $\Psi : X \times L \to K(Y)$, $\Psi(x,\lambda) = x - G(x,\lambda)$ вполне непрерывных мультиполей.

Нетрудно убедиться, что мультиполе $\Phi = i - F : X \to K(Y)$, соответствующее полунепрерывному сверху мультиотображению $F : X \to K(Y)$ полунепрерывно сверху. Если мультиотображение $F : X \to K(Y)$ вполне непрерывно, то соответствующее ему мультиполе также называется вполне непрерывным.

Отметим следующее важное свойство (см. [**?**]):

(1.1.15) Лемма. Если $X' \subset X$ замкнуто, $\Psi : X \times L \to K(Y)$ – семейство вполне непрерывных мультиполей, то множество $\Psi(X' \times L)$ замкнуто. ■

Нам понадобится также следующее легко проверяемое утверждение.

(1.1.16) Лемма. Если мультиотображения $F_0, F_1 : X \to K(Y)$ вполне непрерывны, то мультиотображение $G : X \times [0,1] \to K(Y)$,

$$G(x, \lambda) = \lambda F_1(x) + (1 - \lambda) F_0(x)$$

также вполне непрерывно. ■

Пусть X, Y – топологические пространства, $F : X \to K(Y)$ мультиотображение. Для $i \geq 0$ обозначим

$$M_F^i = \{x |\ x \in X,\ F(x) \text{ не является } i-\text{ацикличным}\}.$$

(1.1.17) Определение. Полунепрерывное сверху мультиотображение $F : X \to K(Y)$ называется почти ациклическим, если:

(a) $M_F^i = \varnothing$ для всех i, начиная с некоторого $i_0 \geq 0$;

(b) $\xi = \max\limits_{0 \leq i < i_0} (\dim_X M_F^i) < \infty$.

Если для всех $i \geq 0$ $\ M_F^i = \varnothing$, то мультиотображение F называется ациклическим.

(1.1.18) Определение. Мультиотображение $F : X \to K(Y)$ называется псевдоациклическим, если существует топологическое пространство Z и непрерывное отображение $\Theta : Z \to Y$ такое, что F представимо в виде композиции

$$F = \Theta \circ \bar{F},$$

где $\bar{F} : X \to K(Z)$ почти ациклическое мультиотображение. Пара $(\Theta, \bar{F})$ будет называться разложением псевдоациклического мультиотображения F.

2 Относительная топологическая степень псевдоациклических мультиполей в локально выпуклом пространстве

Пусть E – хаусдорфово локально выпуклое пространство, $U \subset E$ – выпуклая конечно ограниченная открытая окрестность нуля.

Пусть T – выпуклое замкнутое подмножество E. Обозначим $U_T = U \cap T$.

Рассмотрим $F = \Theta \circ \bar{F} : \partial U \to K(E)$ – псевдоациклическое мультиотображение такое, что:

a) $F(\partial U \cap T) \subseteq T$;

b) $F|_{\partial U \cap T}$ вполне непрерывно;

c) $FixF \cap \partial U \cap T = \varnothing$.

Нашей задачей является определение топологической степени мультиполя $\Phi = i - F$ относительно множества T.

Согласно лемме 1.1.15 найдется открытая абсолютно выпуклая окрестность нуля $V \subset E$ такая, что $V \cap \Phi(\partial U \cap T) = \varnothing$. Пусть $p_V : E \to \mathbb{R}$ – функционал Минковского, соответствующий окрестности V. Из теоремы 1.1.10 следует, что существует конечномерное подпространство $E' \subset E$, $E \cap F(\partial U \cap T) \neq \varnothing$ и квазиретракция

$$\rho_p : E \to E' \cap \overline{co} F(\partial U \cap T),$$

$p_V(x - \rho_p(x)) < 1$ для любого $x \in F(\partial U \cap T)$.

Без ограничения общности будем считать, что $\dim\, E' > \xi + i_0 + 1$, где ξ, i_0 – параметры почти ациклического отображения $\bar{F}$ (см. определение 1.1.17).

Рассмотрим следующую диаграмму:

$$\partial U \xleftarrow{t} \Gamma_{\bar F} \xrightarrow{r} Z \xrightarrow{\Theta} E \xrightarrow{\rho_p} E' \cap T.$$

Обозначим $q = \rho_p \circ \Theta \circ r$, $S = \partial U$, $S' = S \cap E'$, $\Gamma' = t^{-1}(S') = \Gamma_{\bar F|S'}$.

Рассмотрим следующую диаграмму

$$S' \xleftarrow{t'} \Gamma' \xrightarrow{q'} E' \cap T,$$

где t', q' – сужения на Γ' отображений t, q соответственно.

Обозначим через $\tilde q : \Gamma' \to E'$ отображение $\tilde q = t'(y) - q'(y)$, $y \in \Gamma'$.

(1.2.1) Лемма. $0 \notin \tilde q(\Gamma')$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдется $y \in \Gamma'$ такой, что $\tilde q(y) = 0$. Получаем, что $x = t'(y) = q'(y) \in S' \cap T$ и

$$p_V(\tilde q(y)) = p_V(t'(y) - q'(y)) = p_V(x - q(y)) =$$

$$= p_V(x - r(y) - (q(y) - r(y))) \geq p_V(x - r(y)) - p_V(q(y) - r(y)).$$

Но $x - r(y) \in \Phi(\partial U \cap T)$, следовательно, $p_V(x - r(y)) > 1$, а

$$p_V(q(y) - r(y)) = p_V(\rho_p r(y) - r(y)) < 1,$$

поскольку $r(y) \in F(\partial U \cap T)$. Следовательно, $p_V(\tilde q(y)) > 0$, в противоречие с предположением. ■

Пусть $\dim E' = k + 1$. Тогда S' и $P' = E' \setminus 0$ являются когомологическими k-сферами. Ориентируем их, выбрав образующие элементы $\beta_1 \in H^k(S')$ и $\beta_2 \in H^k(P')$.

Нетрудно проверить, что отображение t' является k-виеторисовским отображением и, следовательно,

$$(t')^{*k} : H^k(S') \to H^k(\Gamma')$$

является изоморфизмом.

(1.2.2) Определение. Топологической степенью $\gamma_T^{\rho_p,E'}(\Phi)$ псевдоациклического мультиполя $\Phi = i - F$ относительно T называется целое число, определяемое следующим образом:

(a) $\gamma_T^{\rho_p,E'}(\Phi) = 0$, если $\bar{U} \cap T = \varnothing$;

(b) $\gamma_T^{\rho_p,E'}(\Phi) = \gamma$, где $[(t')^{*k}]^{-1}\tilde{q}^{*k}(\beta_2) = \gamma\beta_1$, если $\bar{U} \cap T \neq \varnothing$ и $\partial U \cap T \neq \varnothing$;

(c) $\gamma_T^{\rho_p,E'}(\Phi) = 1$, если $\bar{U} \cap T \neq \varnothing$ и $\partial U \cap T = \varnothing$.

Установим корректность данного определения.

(1.2.3) Лемма. Пусть $\rho_p^0,\ \rho_p^1 : E \to E' \cap T$ – две квазиретракции. Тогда

$$\gamma_T^{\rho_p^0,E'}(\Phi) = \gamma_T^{\rho_p^1,E'}(\Phi).$$

Доказательство. Пусть $q_0 = \rho_p^0 \circ \Theta \circ r$, $q_1 = \rho_p^1 \circ \Theta \circ r$, $\tilde{q}_0(y) = t'(y) - q_0'(y)$, $\tilde{q}_1(y) = t'(y) - q_1'(y)$.

Достаточно показать, что отображения $\tilde{q}_0,\ \tilde{q}_1 : \Gamma' \to P'$ гомотопны, то есть их можно соединить непрерывной деформацией без особых точек.

Определим отображение $h : \Gamma' \times [0,1] \to E'$,

$$h(y,\lambda) = \lambda\tilde{q}_1(y) + (1-\lambda)\tilde{q}_0(y).$$

Покажем, что отображение h действует в P'. Предположим противное. Пусть найдутся $y_0 \in \Gamma'$, $\lambda_0 \in [0,1]$ такие, что $h(y_0,\lambda_0) = 0$. Тогда

$$\lambda_0\tilde{q}_1(y_0) + (1-\lambda_0)\tilde{q}_0(y_0) =$$

$$= \lambda_0(t'(y_0) - q_1'(y_0)) + (1-\lambda_0)(t'(y_0) - q_0'(y_0)) =$$

$$= t'(y_0) - \lambda_0 q_1'(y_0) - (1-\lambda_0)q_0'(y_0) = 0,$$

то есть $t'(y_0) \in S \cap T$.

Получим:

$$p_V(\lambda_0\tilde{q}_1(y_0) + (1-\lambda_0)\tilde{q}_0(y_0)) = p_V(t'(y_0) - \lambda_0 q_1'(y_0) - (1-\lambda_0)q_0'(y_0)) =$$

$$= p_V(t(y_0) - \lambda_0\rho_p^1 \circ \Theta r(y_0) - (1-\lambda_0)\rho_p^0 \circ \Theta r(y_0)) =$$

$$= p_V(t(y_0) - \Theta r(y_0) - [\lambda_0(\rho_p^1 \circ \Theta r(y_0) - \Theta r(y_0)) +$$

$$+(1-\lambda_0)(\rho_p^0 \circ \Theta r(y_0) - \Theta r(y_0))]) \geq$$

$$\geq p_V(t(y_0) - \Theta r(y_0)) - \lambda_0 p_V(\rho_p^1 \circ \Theta r(y_0) - \Theta r(y_0)) -$$

$$-(1-\lambda_0)p_V(\rho_p^0 \circ \Theta r(y_0) - \Theta r(y_0)).$$

Но

$$p_V(t(y_0) - \Theta r(y_0)) > 1,$$

$$p_V(\rho_p^1 \Theta r(y_0) - \Theta r(y_0)) < 1,$$

$$p_V(\rho_p^0 \Theta r(y_0) - \Theta r(y_0)) < 1,$$

поэтому $p_V(\lambda_0\tilde{q}_1(y_0) + (1-\lambda_0)\tilde{q}_0(y_0)) > 0$, что противоречит нашему предположению. ■

(1.2.4) Лемма. Пусть E', E'' – два подпространства E такие, что $\dim E' = k+1$, $\dim E'' = k+2$ и $E' \subset E''$. Пусть $\rho_p^0 : E \to E' \cap T$ – квазиретракция и $\rho_p^1 : E \to E'' \cap T$ – отображение, заданное формулой $\rho_p^1(z) = \rho_p^0(z)$ для любых $z \in E$.

Тогда

$$\gamma_T^{\rho_p^0, E'}(\Phi) = \gamma_T^{\rho_p^1, E''}(\Phi).$$

Доказательство. Пусть $P' = E' \backslash 0$, $P'' = E'' \backslash 0$, $S' = S \cap E'$, $S'' = S \cap E''$. Определим отображение $l' : P' \to S'$, $l'' : P'' \to S''$, положив $l'(z) = \frac{z}{||z||}$, $l''(z) = \frac{z}{||z||}$. Ориентируем S', P', S'', P'' таким образом, чтобы

$$\deg \tilde{q}' = \deg(l' \circ \tilde{q}'), \deg \tilde{q}'' = \deg(l'' \circ \tilde{q}''),$$

где deg обозначает топологическую степень отображений когомологических сфер ([17]). Применив теперь к паре $(t'', l'' \circ \tilde{q}'')$ лемму 1.1.9, получим утверждение леммы. ■

Из лемм 1.2.3 и 1.2.4 вытекает, что введенная топологическая степень не зависит от выбора квазиретракции ρ_p и аппроксимирующего пространства E', то есть

$$\gamma_T^{\rho_p, E'}(\Phi) = \gamma_T(\Phi).$$

Введем теперь понятие гомотопии псевдоациклических мультиполей относительно множества T.

(1.2.5) Определение. Пусть $F_0 = \Theta_0 \circ \bar{F}_0$, $F_1 = \Theta_1 \circ \bar{F}_1 : \partial U \to K(E)$ – псевдоациклические мультиотображения такие, что

(a) $F_i(\partial U \cap T) \subset T$;

(b) $F_i|_{\partial U \cap T}$ вполне непрерывно;

(c) $Fix F_i \cap \partial U \cap T = \varnothing$; $i = 0, 1$.

Назовем мультиполя $\Phi_0 = i - F_0$, $\Phi_1 = i - F_1$ гомотопными относительно T, если существуют почти ациклическое мультиотображение $\bar{F} : \partial U \times [0,1] \to K(Z)$ и непрерывное отображение $\Theta : Z \times [0,1] \to E$ такие, что:

(i) $\bar{F}(\cdot, 0) = \bar{F}_0$, $\bar{F}(\cdot, 1) = \bar{F}_1$;

(ii) $\Theta(\cdot, 0) = \Theta_0$, $\Theta(\cdot, 1) = \Theta_1$;

(iii) для псевдоациклического мультиотображения $\tilde{F} : \partial U \times [0,1] \to K(E)$, заданного как

$$\tilde{F}(x, \lambda) = \Theta(\bar{F}(x, \lambda), \lambda)$$

выполнено:

(1) $\tilde{F}((\partial U \cap T) \times [0,1]) \subseteq T$;

(2) $\tilde{F}|_{(\partial U\cap T)\times[0,1]}$ вполне непрерывно;

(3) $x \notin \tilde{F}(x,\lambda)$ для всех $(x,\lambda) \in (\partial U \cap T) \times [0,1]$.

Ясно, что можно отождествить $\tilde{F}(\cdot,0) = F_0$, $\tilde{F}(\cdot,1) = F_1$. Гомотопные относительно T мультиполя мы будем обозначать символом $\Phi_0 \underset{T}{\sim} \Phi_1$.

Справедливо следующее свойство гомотопической инвариантности топологической степени.

(1.2.6) Теорема. Если псевдоациклические мультиполя Φ_0 и Φ_1 гомотопны относительно T, то

$$\gamma_T(\Phi_0) = \gamma_T(\Phi_1).$$

Доказательство. Обозначим $\Phi : \partial U \times [0,1] \to K(E)$, $\Phi(x,\lambda) = x - \tilde{F}(x,\lambda)$ семейство мультиполей, осуществляющих гомотопию между Φ_0 и Φ_1. Множество $\Phi((\partial U \cap T) \times [0,1])$ – замкнуто, следовательно, найдется абсолютно выпуклая открытая окрестность нуля V такая, что $\Phi((\partial U \cap T) \times [0,1]) \cap V = \varnothing$. Действуя так же, как и при определении топологической степени, находим квазиретракцию

$$\rho_p : E \to E' \cap \overline{co}\tilde{F}((\partial U \cap T) \times [0,1]),$$

где $\dim E' > \xi + i_0 + 1$, где ξ, i_0 – параметры почти ациклического мультиотображения $\bar{F} : \partial U \times [0,1] \to K(Z)$.

Рассмотрим диаграмму

$$\partial U \times [0,1] \xleftarrow{t} \Gamma_{\bar{F}} \xrightarrow{r} Z \times [0,1] \xrightarrow{\Theta} E \xrightarrow{\rho_p} E' \cap T,$$

где r определено для $(x,\lambda,y) \in \Gamma_{\bar{F}}$ как $r(x,\lambda,y) = (y,\lambda)$. Обозначим $q = \rho_p \circ \Theta \circ r$, $S' = \partial U \cap E'$, $\Gamma' = t^{-1}(S' \times [0,1])$.

Тогда приходим к диаграмме:

$$S' \times [0,1] \xleftarrow{t'} \Gamma' \xrightarrow{\tilde{q}} P',$$

где $t' = t|_{\Gamma'}$, $q' = q|_{\Gamma'}$,$\tilde{q} = t' - q'$.

Как и прежде, можно установить, что $\tilde{q}$ действует в P'. Рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
S' \times \{0\} \arrow[d, "i_0"'] & t'^{-1}(S' \times \{0\}) \arrow[l, "t'_0"'] \arrow[d, "j_0"] \arrow[dr, "\tilde{q}_0"] & \\
S' \times [0,1] & \Gamma' \arrow[l, "t'"'] \arrow[r, "\tilde{q}"] & P' \\
S' \times \{1\} \arrow[u, "i_1"] & t'^{-1}(S' \times \{1\}) \arrow[l, "t'_1"'] \arrow[u, "j_1"'] \arrow[ur, "\tilde{q}_1"'] &
\end{tikzcd}$$

в которой $\tilde{q}_0$, $\tilde{q}_1$ – сужения $\tilde{q}$; t'_0, t'_1 – ограничения отображения t'; i_0, i_1, j_0, j_1 – вложения.

Переходя к когомологиям, получаем коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
H^k(S' \times \{0\}) \arrow[r, "(t'_0)^{*k}"] & H^k(t'^{-1}(S' \times \{0\})) & \\
H^k(S' \times [0,1]) \arrow[u, "i_0^{*k} \simeq"] \arrow[d, "i_1^{*k} \simeq"'] \arrow[r, "(t')^{*k}"] & H^k(\Gamma') \arrow[u, "j_0^{*k}"'] \arrow[d, "j_1"] & H^k(P') \arrow[l, "\tilde{q}^{*k}"'] \arrow[ul, "\tilde{q}_0^{*k}"'] \arrow[dl, "\tilde{q}_1^{*k}"] \\
H^k(S' \times \{1\}) \arrow[r, "(t'_1)^{*k}"] & H^k(t'^{-1}(S' \times \{1\})) &
\end{tikzcd}$$

Учитывая, что по теореме Виеториса-Бегла-Скляренко 1.1.2 $(t'_0)^{*k}$, $(t')^{*k}$, $(t'_1)^{*k}$ являются изоморфизмами, получаем

(1.2.7) $$[i_0^{*k}]^{-1}[t_0'^{*k}]^{-1}\tilde{q}_0^{*k} = [i_1^{*k}]^{-1}[t_1'^{*k}]^{-1}\tilde{q}_1^{*k}.$$

Окончательно, отождествляя $S' \times \{0\}$ и $S' \times \{1\}$ с S', из 1.2.7 получаем, что $\gamma_T(\Phi_0) = \gamma_T(\Phi_1)$. ■

3 Вычисление относительной топологической степени и теоремы о неподвижной точке и совпадении

3.1 Некоторые теоремы о неподвижной точке

(1.3.1) Теорема. Пусть $F : \bar{U} \to K(E)$ – псевдоациклическое мультиотображение такое, что

(a) $F(\bar{U} \cap T) \subset T$;

(b) $F|_{\bar{U}\cap T}$ – вполне непрерывно;

(c) $FixF \cap \partial U \cap T = \varnothing$.

Если

$$\gamma_T(i - F|_{\partial U}) \neq 0,$$

то существует точка $x_0 \in U \cap T$ такая, что $x_0 \in F(x_0)$.

Доказательство. Предположим противное, то есть $x \notin F(x)$ для всех $x \in \bar{U}_T = \bar{U} \cap T$. Найдем такую абсолютно выпуклую окрестность нуля V, что $V \cap \Phi(\bar{U}_T) = \varnothing$, где $\Phi = i - F$. Пусть $\rho_p : E \to E' \cap \overline{co}F(\bar{U}_T)$ – квазиретракция, $\dim E' > \xi + i_0 + 1$; ξ, i_0 – параметры почти ациклического мультиотображения $\tilde{F}$, где $F = \Theta \circ \tilde{F}$. Рассмотрим диаграмму:

$$\bar{U} \xleftarrow{t} \Gamma_F \xrightarrow{r} Z \xrightarrow{\Theta} E \xrightarrow{\rho_p} E' \cap T.$$

Пусть $\bar{U}' = \bar{U} \cap E'$, $\Gamma' = t^{-1}(\bar{U}')$, $t' = t|_{\Gamma'}$, $q = \rho_p \circ \Theta \circ r$, $q' = q|_{\Gamma'}$, $\tilde{q} = t' - q'$.

Как и прежде, можно показать, что $\tilde{q}$ действует в $P' = E' \setminus 0$.

Рассмотрим теперь следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
\bar{U}' & \Gamma' \arrow[l, "t'"'] \arrow[dr, "\tilde{q}"] & \\
& & P', \\
S' \arrow[uu, "i"] & t'^{-1}(S') \arrow[l, "\hat{t}'"'] \arrow[uu, "j"] \arrow[ur, "\hat{\tilde{q}}"'] &
\end{tikzcd}$$

где $S' = \partial U \cap E'$; $\hat{t}'$, $\hat{\tilde{q}}$ – сужения отображений t', $\tilde{q}$ соответственно; i, j – вложения.

Перейдем к соответствующей диаграмме в когомологиях:

$$\begin{tikzcd}
H^k(\bar{U}') \arrow[r, "(t')^{*k}"] \arrow[dd, "i^{*k}"'] & H^k(\Gamma') \arrow[dd, "j^{*k}"] & \\
& & H^k(P') \arrow[ul, "\tilde{q}^{*k}"'] \arrow[dl, "\hat{\tilde{q}}^{*k}"] \\
H^k(S') \arrow[r, "(\hat{t}')^{*k}"] & H^k(t'^{-1}(S')) &
\end{tikzcd}$$

Учитывая тот факт, что $H^k(\bar{U}') = 0$, получаем, что $[(\hat{t}')^{*k}]^{-1} \circ \hat{\tilde{q}}^{*k} = 0$, а следовательно, $\gamma_T(\Phi) = 0$, что противоречит условию теоремы. ■

Доказанный общий принцип открывает возможности для формулировки различных теорем о неподвижной точке. Рассмотрим следующее утверждение.

(1.3.2) Теорема. Пусть $\bar{U}_T \neq \varnothing$, $\varphi = i - f : \bar{U} \to E$ – однозначное поле такое, что:

(a) $f(\bar{U}_T) \subset T$;

(b) $f|_{\bar{U}_T}$ – вполне непрерывно;

(c) $Fix\, f \cap \partial U \cap T = \varnothing$;

(d) $\gamma_T(i - f|_{\partial U}) \neq 0$.

Пусть $\Phi = i - F$ – псевдоациклическое мультиполе такое, что:
(i) $F(\bar{U}_T) \subset T$;
(ii) $F|_{\bar{U}_T}$ – вполне непрерывно;
(iii) $Fix\, F \cap \partial U \cap T = \varnothing$.

Предположим далее, что

(1.3.3) $$\mu\varphi(x) \notin \Phi(x) \text{ для всех } \mu < 0, x \in \partial U \cap T.$$

Тогда найдется точка $x \in \bar{U}_T$ такая, что $x \in F(x)$.

Доказательство. Рассмотрим семейство мультиотображений

$$G : \bar{U} \times [0,1] \to K(E),$$

$$G(x, \lambda) = \lambda f(x) + (1-\lambda)F(x).$$

Тогда $G(\bar{U}_T \times [0,1]) \subset T$ в силу выпуклости T, $G|_{\bar{U}_T \times [0,1]}$ – вполне непрерывно.

Далее, мультиотображение G порождает гомотопию псевдоациклических мультиполей. Действительно, пусть $F = \Theta \circ \tilde{F}$ – разложение псевдоациклического мультиотображения F:

$$\bar{U} \overset{\tilde{F}}{\multimap} Z \xrightarrow{\Theta} E.$$

Обозначим $Z_G = E \times Z$ – пространство с естественной метрикой и заметим, что мультиотображение $\tilde{G} : \bar{U} \times [0,1] \to K(Z_G)$,

$$\tilde{G}(x, \lambda) = \{f(x)\} \times \tilde{F}(x),$$

почти ациклично. Зададим теперь отображение $\Theta_G : Z_G \times [0,1] \to E$ как композицию

$$E \times Z \times [0,1] \xrightarrow{(id_E \times \Theta \times id_{[0,1]})} E \times E \times [0,1] \xrightarrow{\psi} E,$$

где id_E, $id_{[0,1]}$ – тождественные отображения в E и $[0,1]$ соответственно, а ψ определено как

$$\psi(y_1, y_2, \lambda) = \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2.$$

Ясно, что мультиотображение G может теперь быть записано как

$$G(x, \lambda) = \Theta_G(\tilde{G}(x, \lambda), \lambda),$$

что согласуется с определением 1.2.5.

Докажем, что $x \notin G(x, \lambda)$, $(x, \lambda) \in (\partial U \cap T) \times [0,1]$.

Предположим противное. Тогда для некоторых $x_0 \in \partial U \cap T$, $\lambda_0 \in (0,1)$:

$$x_0 \in \lambda_0 f(x_0) + (1-\lambda_0) F(x_0) \text{ или}$$

$$\lambda_0 (x_0 - f(x_0)) \in (\lambda_0 - 1)(x_0 - F(x_0)),$$

то есть

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} \varphi(x_0) \in \Phi(x_0),$$

что противоречит (1.3.3).

Следовательно, $i - G$ – почти псевдоациклическая гомотопия, соединяющая мультиполе Φ и поле φ. Из теоремы 1.2.6 следует тогда, что

$$\gamma_T(\varphi) = \gamma_T(i - F) \neq 0$$

и доказываемое утверждение вытекает теперь из предыдущей теоремы. ■

(1.3.4) Следствие (Теорема Шефера). Пусть $0 \in T$, $F : \bar{U} \to K(E)$ – псевдоациклическое мультиотображение такое, что:

(i) $F(\bar{U}_T) \subset T$;

(ii) $F|_{\bar{U}_T}$ – вполне непрерывно.

Пусть

$$\mu x \notin F(x) \text{ для всех } \mu > 1, x \in \partial U \cap T.$$

Тогда найдется $x \in \bar{U}_T$ такое, что $x \in F(x)$.

Доказательство. Без ограничения общности будем полагать, что

$$Fix\, F \cap \partial U \cap T = \varnothing.$$

Положим в Теореме 1.3.2 $\varphi(x) \equiv x$. Тогда условия (a), (b), (c), (d), (i), (ii), (iii) предыдущей теоремы выполнены. Предположение (1.3.3) также выполнено, так как, полагая противное, найдем $x_0 \in \partial U \cap T$ и $\mu_0 < 0$ такие, что $\mu_0 x_0 \in x_0 - F(x_0)$, то есть $(1-\mu_0)x_0 \in F(x_0)$, что противоречит условию теоремы.■

(1.3.5) Следствие (Теорема Роте). Пусть $0 \in T$, $F : \bar{U} \to K(E)$ – псевдоациклическое мультиотображение, $F(\bar{U}_T) \subset T$, $F|_{\bar{U}_T}$ – вполне непрерывно. Пусть $F(\partial U \cap T) \subset \bar{U}_T$. Тогда найдется $x \in \bar{U}_T$ такой, что $x \in F(x)$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что условия теоремы Шефера здесь выполнены. ■

3.2 Теорема о совпадении типа Пуанкаре

Те же методы позволяют доказать следующую теорему о совпадении типа Пуанкаре.

(1.3.6) Теорема. Пусть $T \subset E$ – конус с вершиной в нуле. Пусть $\varphi = i - f : \bar{U} \to E$ – однозначное поле такое, что условия (a), (b), (c), (d) теоремы 1.3.2 выполнены. Пусть $\Phi = i - F : \bar{U} \to K(E)$ – псевдоациклическое мультиполе, удовлетворяющее условиям (i), (ii), (iii) той же теоремы. Предположим далее, что

$$\textbf{(1.3.7)} \qquad \mu\varphi(x) \notin F(x) \text{ для всех } \mu > 1, x \in \partial U \cap T.$$

Тогда найдется точка $x \in \bar{U}_T$ такая, что $\varphi(x) \in F(x)$.

Доказательство. Рассмотрим мультиотображение $\varphi - F : \bar{U} \to K(E)$, задаваемое формулой

$$(\varphi - F)(x) = \varphi(x) - F(x).$$

Без ограничения общности можно считать, что $0 \notin (\varphi - F)(x)$ для всех $x \in \partial U \cap T$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что $0 \in (\varphi - F)(U_T)$.

Рассмотрим мультиотображение $G : \bar{U} \times [0,1] \to K(E)$,

$$G(x, \lambda) = f(x) + \lambda F(x), x \in \bar{U}, \lambda \in [0,1].$$

Легко проверить, что $G(\bar{U}_T \times [0,1]) \subset T$, $G|_{\bar{U}_T \times [0,1]}$ – вполне непрерывно. Остается доказать, что $x \notin G(x, \lambda)$ для всех $(x, \lambda) \in (\partial U \cap T) \times [0,1]$. Для $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ этот факт очевиден. Предположим противное, то есть

$$x_0 \in f(x_0) + \lambda_0 F(x_0)$$

при некоторых $x_0 \in \partial U \cap T$, $\lambda_0 \in (0,1)$.

Тогда $\varphi(x_0) \in \lambda_0 F(x_0)$, $\frac{1}{\lambda_0}\varphi(x_0) \in F(x_0)$ и так как $\frac{1}{\lambda_0} > 1$, то получим противоречие условию (1.3.7) теоремы.

Аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 1.3.2, мы приходим к выводу, что G порождает псевдоациклическую гомотопию, соединяющую поле φ и мультиполе $\varphi - F$. Из теоремы 1.2.6 следует, что

$$\gamma_T(\varphi) = \gamma_T(\varphi - F) \neq 0$$

и теперь, применяя теорему 1.3.1, получаем, что

$$0 \in (\varphi - F)(U_T). \qquad \blacksquare$$

3.3 Эквивариантные и нечетные мультиполя

В настоящем разделе мы рассмотрим некоторые обобщения работ Я.А. Израилевича и В.В. Обуховского ([20], [21]).

Пусть $d : E \to E$ – непрерывный линейный оператор, удовлетворяющий следующим условиям:

$$d^k = id_E, k \geq 2;$$

если $L = Fix\, d$, то

$$d^i(y) \neq y, y \notin L, i \not\equiv 0(mod\, k),$$

то есть d является полусвободным периодическим оператором порядка k.

Пусть U, как и прежде, выпуклая конечно ограниченная окрестность нуля, $S = \partial U$ и пусть $d(S) = S$.

(1.3.8) Определение. Мультиотображение $F : S \to K(E)$ называется эквивариантным относительно d, если

$$F \circ d = d \circ F.$$

Будем предполагать, что если эквивариантное относительно d мультиотображение $F : S \to K(E)$ псевдоациклично, и $L \neq 0$, то мультиотображение $F_L : S \cap L \to K(L)$, $F_L(x) = F(x) \cap L$ определено и псевдоациклично, причем $\dim\, L > i'_0 + \xi' + 1$, где i'_0, ξ'– параметры F_L

(это условие выполнено, например, если все образы $F(x)$ выпуклы для $x \in S \cap L$).

(1.3.9) Теорема. Пусть $F : S \to K(E)$ – псевдоациклическое мультиотображение, эквивариантное относительно периодического оператора d периода k. Пусть T – выпуклое замкнутое подмножество E такое, что $d(T) = T$ и $T \cap L \neq \varnothing$ в случае, если $L \neq 0$ и $T \cap \bar{U} \neq \varnothing$.

Пусть $F(\partial U \cap T) \subset T$, $F|_{\partial U \cap T}$ – вполне непрерывно, $Fix\, F \cap \partial U \cap T = \varnothing$. Тогда

$$\gamma_T(i - F) \equiv \gamma_{T \cap L}(i - F_L)(mod\, k), \text{если}\, L \neq 0,$$

$$\gamma_T(i - F) \equiv 1(mod\, k), \text{если}\, L = 0.$$

Доказательство. Пусть $L \neq 0$. Пусть, как и прежде, V – абсолютно выпуклая открытая окрестность нуля такая, что $V \cap \Phi(\partial U \cap T) = \varnothing$. Пусть V_1 – такая абсолютно выпуклая открытая окрестность нуля, что

$$d^i(V_1) \subset V,\, 0 \leq i \leq k-1,$$

и пусть $\rho_{V_1} : E \to E' \cap \overline{co} F(S \cap T)$ – соответствующая квазиретракция на $F(S \cap T)$. Без ограничения общности пространство E' можно считать d-инвариантным (в противном случае его можно расширить, перейдя к линейной оболочке d-итераций базисных векторов).

Тогда отображение

$$\rho = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} d^{k-i} \rho_{V_1} d^i : E \to E' \cap \overline{co} F(S \cap T)$$

является эквивариантной квазиретракцией относительно полунормы p_V. В самом деле, эквивариантность ρ очевидна, а если $y \in F(S \cap T)$, то

$$p_V(\rho(y) - y) = p_V(\frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} d^{k-i} \rho_{V_1} d^i(y) - \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} d^{k-i} d^i(y)) \leq$$

$$\leq \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} p_V(d^{k-i}(\rho_{V_1}d^i(y) - d^i(y)) < 1,$$

поскольку $\rho_{V_1}d^i(y) - d^i(y) \in V_1$. Рассмотрим теперь, как прежде, диаграмму

$$S' \xleftarrow{t'} \Gamma' \xrightarrow{\tilde{q}} P',$$

где $\tilde{q} = t' - q'$, $q' = \rho \circ \Theta \circ r|_{\Gamma'}$.

Определим полусвободное периодическое отображение $\tilde{d} : \Gamma' \to \Gamma'$ формулой

$$\tilde{d}(x, y) = (d(x), d(y)).$$

Период $\tilde{d}$ равен k, а $Fix\,\tilde{d} = \tilde{L}$ – график отображения $F_L|_{S'\cap L}$. Отметим, что отображения t' и $\tilde{q}$ эквивариантны:

$$t'\tilde{d} = dt',\ \tilde{q}\tilde{d} = d\tilde{q}.$$

Определим сужения

$$t'_{\tilde{L}} : L' \to L \cap S',\ \tilde{q}_{\tilde{L}} : \tilde{L} \to L \cap P'.$$

Пусть $\dim(L \cap S') = m$, в силу теоремы 1.1.2

$$(t')^{*\,k} : H^k(S') \to H^k(\Gamma') \text{ и}$$

$$(t'_{\tilde{L}})^{*\,m} : H^m(L \cap S') \to H^m(\tilde{L})$$

– изоморфизмы. Считая ориентации когомологических сфер S', Γ' и $L \cap S'$, $\tilde{L}$ согласованными, имеем $deg\,t' = deg\,t'_{\tilde{L}} = 1$. Тогда по теореме 4 ([19]) имеем: $ind\,\tilde{d} = ind\,d$, где ind означает индекс Смита периодического отображения. Но, применив ту же теорему к отображениям $\tilde{q}$, $\tilde{q}_{\tilde{L}}$, получаем:

$$deg\,\tilde{q} \cdot ind\,\tilde{d} \equiv deg\,\tilde{q}_{\tilde{L}} \cdot ind\,d (mod\,k),$$

откуда

$$deg\,\tilde{q} \equiv deg\,\tilde{q}_{\tilde{L}}(mod\,k).$$

В силу (1.2.2) имеем

$$\gamma_T(\Phi) = deg\,\tilde{q},$$

$$\gamma_T(i - F_L) = deg\,\tilde{q}_{\tilde{L}},$$

что и завершает доказательство.

Доказательство для случая $L = 0$ аналогично. ■

(1.3.10) Следствие (Теорема о нечетном поле). Пусть U – абсолютно выпуклая открытая конечно ограниченная окрестность нуля, $F : \partial U \to K(E)$ – псевдоациклическое мультиотображение, T – симметричное относительно нуля выпуклое замкнутое подмножество E. Пусть $F(\partial U \cap T) \subset T$, $F|_{\partial U \cap T}$ – вполне непрерывно, $Fix\,F \cap \partial U \cap T = \varnothing$ и

$$F(-x) = -F(x)$$

для всех $x \in \partial U$. Тогда $\gamma_T(i - F) \equiv 1(mod\,2)$.

(1.3.11) Следствие. Пусть U – открытая выпуклая конечно ограниченная окрестность нуля такая, что $d(U) = U$, $d(\partial U) = \partial U$, где $d : E \to E$ – непрерывный линейный периодический оператор периода k. Пусть T – выпуклое замкнутое подмножество E такое, что $d(T) = T$ и $T \cap L \neq \varnothing$ в случае $L = Fix\,d \neq 0$ и $T \cap \bar{U} \neq \varnothing$. Пусть $F : \bar{U} \to K(E)$ – псевдоациклическое мультиотображение такое, что $F(\bar{U}_T) \subset T$, $F|_{\bar{U}_T}$ – вполне непрерывно, Пусть F эквивариантно на ∂U относительно d и выполнено одно из следующих условий:

(i) $L = 0$,

(ii) $L \neq 0$ и $\gamma_{T \cap L}(i - F_L) \not\equiv 0(mod\,k)$.

Тогда существует неподвижная точка $x \in \bar{U} \cap T$, $x \in F(x)$.

Глава 2. Топологическая степень для одного класса некомпактных мультиполей в локально выпуклых пространствах

1 Основные понятия и определения

Пусть E – хаусдорфово локально выпуклое пространство, $X \subseteq E$ – замкнутое подмножество, Λ – компактное топологическое пространство.

(2.1.1) Определение. (см., например, [22], [13], [35]) Выпуклое замкнутое множество $T \subseteq E$ называется фундаментальным для мультиотображения $F : X \to K(E)$ (или соответствующего ему мультиполя $\Phi = i - F$), если:

1) $F(X \cap T) \subseteq T$;

2) из $x_0 \in \overline{co}(F(x_0) \cup T)$ следует $x_0 \in T$.

Подчеркнем, что определение не исключает случаи $T = \varnothing$ или $X \cap T = \varnothing$. Отметим также следующее важное обстоятельство.

(2.1.2) Лемма. Каждое фундаментальное множество мультиотображения F содержит множество неподвижных точек $Fix F = \{x \in X : x \in F(x)\}$. ■

Выпуклое замкнутое множество $T \subseteq E$ называется фундаментальным для семейства мультиполей $\Psi = i - G : X \times \Lambda \to K(E)$, если оно фундаментально для каждого мультиполя $\Psi(\cdot, \lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, из данного семейства.

Примерами фундаментальных множеств могут служить все пространство E или множество $\overline{co}(F(X))$.

Нетрудно проверить следующие свойства фундаментальных множеств.

(2.1.3) Лемма. Если T – фундаментальное множество мультиотображения $F : X \to K(E)$, $P \subset T$, то множество $\tilde{T} = \overline{co}(F(X \cap T) \cup P)$ фундаментально для F. ■

(2.1.4) Лемма. Если $\{T_\alpha\}$ – некоторая система фундаментальных множеств мультиотображения F, то $\bigcap\limits_{\alpha} T_\alpha$ – также фундаментальное множество F.

Опишем теперь рассматриваемый ниже класс мультиотображений.

(2.1.5) Определение. (см., например, [22], [13], [35]) Если мультиотображение $F : X \to K(E)$ имеет такое фундаментальное (возможно, пустое) множество T, что сужение F на $X \cap T$ компактно, то F и соответствующее ему мультиполе $\Phi = i - F$ называется фундаментально сужаемыми (на T).

Мультиотображение $G : X \times \Lambda \to K(E)$ такое, что каждое мультиотображение $G(\cdot, \lambda)$, $\lambda \in \Lambda$ фундаментально сужаемо на T и сужение G на $(X \cap T) \times \Lambda$ компактно, называется семейством фундаментально сужаемых (на T) мультиотображений.

(2.1.6) Лемма. Если $X_1 \subseteq X$, $\Lambda_1 \subseteq \Lambda$ и $G : X \times \Lambda \to K(E)$ – семейство фундаментально сужаемых мультиотображений, то сужение $G \mid X_1 \times \Lambda_1$ – также семейство фундаментально сужаемых на T отображений.

(2.1.7) Определение. Фундаментальное множество T мультиотображения $F : X \to K(E)$ или семейства мультиотображений $G : X \times \Lambda \to K(E)$ такое, что $X \cap T \neq \varnothing$ и сужение F на $X \cap T$ (соответственно, G на $(X \cap T) \times \Lambda$) компактно, называется существенным.

(2.1.8) Определение. Если мультиотображение $F : X \to K(E)$ или семейство мультиотображений $G : X \times \Lambda \to K(E)$ обладает существенным фундаментальным множеством, то F или, соответственно, G называется вполне фундаментально сужаемым (на T). Этим же термином будем называть и соответствующее мультиполе $\Phi(x) = x - F(x)$ или семейство мультиполей $\Phi(x, \lambda) = x - G(x, \lambda)$.

Отметим, что каждое компактное мультиотображение вполне фундаментально сужаемо на E или $\overline{co}(F(X) \cup \{a\})$, где $a \in X$ произвольно.

В качестве другого важного класса фундаментально сужаемых мультиотображений мы будем рассматривать уплотняющие мультиотображения. Дадим необходимые определения. Напомним (см., например, [10], [13], [35]) следующее понятие.

(2.1.9) Определение. Пусть $(A, \geq)$ – частично упорядоченное множество. Отображение $\beta : P(E) \to A$ называется мерой некомпактности (МНК) в E, если

$$\beta(\overline{co}\Omega) = \beta(\Omega)$$

для любого $\Omega \in P(E)$.

Мера некомпактности β называется:

(1) монотонной, если из $\Omega_0, \Omega_1 \in P(E)$, $\Omega_0 \subseteq \Omega_1$ следует $\beta(\Omega_0) \leq \beta(\Omega_1)$;

(2) несингулярной, если $\beta(\{a\} \cup \Omega) = \beta(\Omega)$ для любых $a \in E$, $\Omega \in P(E)$;

(3) полуаддитивной, если $\beta(\Omega_0 \cup \Omega_1) = \max\{\beta(\Omega_0), \beta(\Omega_1)\}$ для любых $\Omega_0, \Omega_1 \in P(E)$;

(4) инвариантной относительно отражения в нуле, если $\beta(-\Omega) = \beta(\Omega)$ для любого $\Omega \in P(E)$.

Если A – конус в банаховом пространстве, то МНК β называется:

(5) полуоднородной, если $\beta(\lambda\Omega) = |\lambda|\beta(\Omega)$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$;

(6) алгебраически полуаддитивной, если

$$\beta(\Omega_0 + \Omega_1) \leq \beta(\Omega_0) + \beta(\Omega_1)$$

для любых $\Omega_0, \Omega_1 \in P(E)$;

(7) правильной, если $\beta(\Omega) = 0$ равносильно относительной компактности Ω.

МНК β называется вещественной, если $A = [0, +\infty]$ с естественным упорядочением и $\beta(\Omega) < +\infty$ для каждого ограниченного множества $\Omega \in P(E)$

Распространенными примерами мер некомпактности в нормированных пространствах, обладающими свойствами (1)–(7), являются мера некомпактности Хаусдорфа

$$\chi(\Omega) = \inf\{\varepsilon : \varepsilon > 0, \Omega \text{ имеет в } E \text{ конечную } \varepsilon-\text{сеть}\}$$

и мера некомпактности Куратовского

$$\alpha(\Omega) = \inf\{d :\ d > 0,\ \Omega\ \text{ допускает разбиение на конечное}$$

$$\text{число множеств, диаметр которых меньше } d\}.$$

Важным примером меры некомпактности в пространстве непрерывных функций $\mathcal{E} = C([a;b];E)$, где E – банахово пространство, удовлетворяющее указанным выше свойствам, является бинарная мера некомпактности ν со значениями в $\mathbb{R}^2_+$ с естественным полуупорядочением:

$$\nu(\Omega) = (\varphi(\Omega), mod_c(\Omega)),$$

где $\varphi(\Omega) = \sup\limits_{a \le t \le b} \chi_E(\Omega(t))$ – модуль послойной некомпактности,

$$\Omega(t) = \{x(t) : x \in \Omega\},\ mod_c(\Omega) = \lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in \Omega} \max_{|t_1 - t_2| \le \delta} \|x(t_1) - x(t_2)\|_E -$$

модуль равностепенной непрерывности.

(2.1.10) Определение. (см., например, [13], [35]) Мультиотображение $F : X \to K(E)$ или семейство мультиотображений $G : X \times \Lambda \to K(E)$ называется уплотняющим относительно МНК β (или β-уплотняющим), если для любого $\Omega \subseteq X$ не являющегося относительно компактным, выполнено, соответственно,

$$\beta(F(\Omega)) \ngeq \beta(\Omega)$$

или

$$\beta(G(\Omega \times \Lambda)) \ngeq \beta(\Omega).$$

Рассмотрим следующий важный класс уплотняющих мультиотображений.

(2.1.11) Определение. Пусть β – вещественная МНК в E и $0 \le k < 1$. Мультиотображение $F : X \to K(E)$ или семейство мультиотображений $G : X \times \Lambda \to K(E)$ называются (k, β)-уплотняющими, если, соответственно,

$$\beta(F(\Omega)) \le k\beta(\Omega)$$

или

$$\beta(G(\Omega \times \Lambda)) \le k\beta(\Omega)$$

для любого $\Omega \subseteq X$.

Соответствующие мультиполя или семейства мультиполей также называется β- или (k, β)-уплотняющими.

Имеют место следующие условия, обеспечивающие полную фундаментальную сужаемость уплотняющих мультиотображений (см. [35]).

(2.1.12) Лемма. Мультиотображение $F : X \to K(E)$ вполне фундаментально сужаемо в каждом из следующих случаев:

1) F полунепрерывно сверху и β-уплотняет относительно монотонной несингулярной МНК β;

2) X ограничено и F является (k, β)-уплотняющим относительно вещественной, монотонной, несингулярной и правильной МНК β.

Аналогичное свойство имеет место и для семейства мультиотображений $G : X \times \Lambda \to K(E)$.

Более того, в обеих случаях несингулярность МНК β обеспечивает существование существенного фундаментального множества, содержащего любую наперед заданную точку $x \in X$.

В этой ситуации определена целочисленная характеристика – топологическая степень $\gamma_T(i - F, \bar{U})$ псевдоациклического мультиполя $i - F$ относительно T, которая обладает следующими основными свойствами (см. гл. 1):

(2.1.13) Свойство нормализации. Если $\bar{U} \cap T \neq \varnothing$ и $\partial U \cap T = \varnothing$, то $\gamma_T(i - F, \bar{U}) = 1$.

(2.1.14) Свойство неподвижной точки. Если $\gamma_T(i - F, \bar{U}) \neq 0$, то $\varnothing \neq FixF \subset U_T$.

(2.1.15) Свойство сужения отображения. Если $T_1 \subset T$ – выпуклое замкнутое множество такое, что $F(\bar{U} \cap T) \subseteq T_1$, то

$$\gamma_T(i - F, \bar{U}) = \gamma_{T_1}(i - F, \bar{U}).$$

(2.1.16) Свойство гомотопической инвариантности. Если

$$\Phi_0 \underset{T}{\sim} \Phi_1,$$

то

$$\gamma_T(\Phi_0, \bar{U}) = \gamma_T(\Phi_1, \bar{U}).$$

2 Топологическая степень и теоремы о неподвижной точке для фундаментально сужаемых мультиотображений

Пусть U – открытое выпуклое конечно ограниченное подмножество локально выпуклого пространства E; $F = \Theta \circ \widetilde{F} : \bar{U} \to K(E)$ – вполне фундаментально сужаемое псевдоациклическое мультиотображение такое, что

$$x \notin F(x)$$

для всех $x \in \partial U$.

Введем следующее понятие.

(2.2.1) Определение. Топологической степенью мультиполя $\Phi = i - F$, соответствующего F, называется топологическая степень мультиполя Φ относительно произвольного существенного фундаментального множества T:

$$\gamma(\Phi, \bar{U}) := \gamma_T(\Phi, \bar{U}).$$

Для доказательства корректности этого определения, то есть независимости степени от выбора существенного фундаментального множества, нам понадобится теорема 1.1.10.

(2.2.2) Лемма. Пусть T_0, T_1 – существенные фундаментальные множества мультиотображения F. Тогда

$$\gamma_{T_0}(\Phi, \bar{U}) = \gamma_{T_1}(\Phi, \bar{U}).$$

Доказательство. Согласно Лемме 2.1.4, множество $T = T_0 \cap T_1$ фундаментально. Если $\bar{U}_T = \bar{U} \cap T = \varnothing$, то из Леммы 2.1.2 следует, что

$FixF = \varnothing$, и следовательно, по свойству неподвижной точки (2.1.14), получаем

$$\gamma_{T_0}(\Phi, \bar{U}) = \gamma_{T_1}(\Phi, \bar{U}) = 0.$$

Рассмотрим теперь случай $U_T \neq \varnothing$.

Согласно Лемме 1.1.15, множество $\Phi(\partial U_T)$ замкнуто. Поскольку это множество не содержит нуля, то найдется абсолютно выпуклая поглощающая окрестность нуля V такая, что

$$V \cap \Phi(\partial U_T) = \varnothing.$$

Пусть полунорма p – калибровочная функция окрестности V.

Рассмотрим квазиретракцию $\rho_p : E \to \overline{co}F(\bar{U}_T)$, соответствующую полунорме p, и пусть $F = \Theta \circ \widetilde{F}$ – разложение псевдоациклического мультиотображения F:

$$\bar{U} \overset{\widetilde{F}}{\multimap} Z \xrightarrow{\Theta} E.$$

Рассмотрим непрерывное отображение $\Theta_G : Z \times [0,1] \to E$, заданное как

$$\Theta_G(z, \lambda) = (1-\lambda)\Theta(z) + \lambda \rho_p \Theta(z)$$

и почти ациклическое мультиотображение $\widetilde{F}_G : \bar{U} \times [0,1] \to K(Z)$,

$$\widetilde{F}_G(x, \lambda) = \widetilde{F}(x).$$

Тогда мультиотображение $G : \bar{U} \times [0,1] \to K(E)$,

$$G(x, \lambda) = \Theta_G(\widetilde{F}_G(x, \lambda), \lambda)$$

определяет гомотопию относительно T_0 мультиполей $\Phi = i - F$, $\hat{\Phi} = i - \hat{F}$, где $\hat{F}(x) = \rho_p F(x)$.

Действительно, свойства (1) и (2) Определения 1.2.5 относительно T_0 легко проверяются. Проверим выполнение свойства (3), то есть покажем, что $x \notin G(x, \lambda)$ для всех $(x, \lambda) \in \partial U_{T_0} \times [0, 1]$.

В самом деле, пусть найдется $(x_0, \lambda_0) \in \partial U_{T_0} \times [0, 1]$ такое, что

$$x_0 \in G(x_0, \lambda_0).$$

Это означает, что

$$x_0 = (1 - \lambda_0)\Theta(y_0) + \lambda_0 \rho_p(\Theta(y_0))$$

для некоторого $y_0 \in \widetilde{F}(x_0)$ или

(2.2.3) $x_0 = (1 - \lambda_0)z_0 + \lambda_0 \rho_p(z_0)$,

где $z_0 = \Theta(y_0) \in F(x_0)$.

Из равенства (2.2.3) вытекает, что

$$x_0 \in \overline{co}(F(x_0) \cup T)$$

и, следовательно, $x_0 \in \partial U_T$. Но тогда

$$x_0 - z_0 \in \Phi(x_0) \subset \Phi(\partial U_T)$$

и, согласно выбору полунормы p, получаем

$$p(x_0 - z_0) \geq 1.$$

Но, с другой стороны, из (2.2.3) имеем

$$p(x_0 - z_0) = p(\lambda_0(\rho_p(z_0) - z_0)) < 1.$$

Полученное противоречие показывает, что $x \notin G(x, \lambda)$ для всех $(x, \lambda) \in \partial U_{T_0} \times [0, 1]$ и таким образом $\Phi \underset{T_0}{\sim} \hat{\Phi}$.

Отсюда получаем

$$\gamma_{T_0}(\Phi, \bar{U}) = \gamma_{T_0}(\hat{\Phi}, \bar{U}).$$

Заметим теперь, что по построению $\hat{F}(\bar{U}_{T_0}) \subset T$, поэтому, применяя свойство сужения отображения (2.1.15), мы получаем

$$\gamma_{T_0}(\Phi, \bar{U}) = \gamma_T(\hat{\Phi}, \bar{U}).$$

Повторяя те же рассуждения с заменой фундаментального множества T_0 на T_1, мы получим аналогичное равенство

$$\gamma_{T_1}(\Phi, \bar{U}) = \gamma_T(\hat{\Phi}, \bar{U}),$$

откуда

$$\gamma_{T_0}(\Phi, \bar{U}) = \gamma_{T_1}(\Phi, \bar{U}),$$

что и доказывает корректность определения степени. ■

Опишем теперь основные свойства степени.

(2.2.4) Определение. Пусть $F_0 = \Theta_0 \circ \widetilde{F_0}$, $F_1 = \Theta_1 \circ \widetilde{F_1} : \bar{U} \to K(E)$ – вполне фундаментально сужаемые псевдоациклические мультиотображения такие, что

$$Fix F_i \cap \partial U = \varnothing, i = 0, 1.$$

Мультиполя $\Phi_0 = i - F_0$ и $\Phi_1 = i - F_1$ называются гомотопными

$$\Phi_0 \sim \Phi_1,$$

если существуют почти ациклическое мультиотображение $\widetilde{F} : \bar{U} \times [0, 1] \to K(Z)$ и непрерывное отображение $\Theta : Z \times [0, 1] \to E$ такие, что:

(i) $\widetilde{F}(\cdot, 0) = \widetilde{F_0}$, $\widetilde{F}(\cdot, 1) = \widetilde{F_1}$;

(ii) $\Theta(\cdot, 0) = \Theta_0$, $\Theta(\cdot, 1) = \Theta_1$;

(iii) для псевдоациклического мультиотображения $G : \bar{U} \times [0,1] \to K(E)$, заданного как

$$G(x,\lambda) = \Theta(\widetilde{F}(x,\lambda),\lambda)$$

выполнено:

(1) G вполне фундаментально сужаемо;

(2) $x \notin G(x,\lambda)$ для всех $(x,\lambda) \in \partial U \times [0,1]$.

Из свойства (2.1.16) и Леммы 2.2.2 вытекает

(2.2.5) Свойство гомотопической инвариантности. Если $\Phi_0 \sim \Phi_1$, то

$$\gamma(\Phi_0, \bar{U}) = \gamma(\Phi_1, \bar{U}).$$

(2.2.6) Свойство сужения отображения. Пусть E_1 – линейное подпространство E такое, что $U_1 = U \cap E_1 \neq \varnothing$ и вполне фундаментально сужаемое мультиотображение $F : \bar{U} \to K(E)$ таково, что

1) $FixF \cap \partial U = \varnothing$;

2) $F(\bar{U}) \subset E_1$;

Тогда

$$\gamma(i - F, \bar{U}) = \gamma_1(i - F, \bar{U_1}),$$

где γ_1 обозначает степень, вычисляемую в пространстве E_1.

Это свойство вытекает из Лемм 2.1.2 и 2.1.3, а также свойства (2.1.15).

Рассмотрим теперь некоторые применения введенной характеристики к теоремам о неподвижной точке. Заметим прежде всего, что справедлив следующий общий принцип, вытекающий из свойства (2.1.14).

(2.2.7) Теорема. Пусть для вполне фундаментально сужаемого псевдоациклического мультиотображения $F : \bar{U} \to K(E)$ такого, что $x \notin$

$F(x)$ для всех $x \in \partial U$ выполнено

$$\gamma(i - F, \bar{U}) \neq 0.$$

Тогда $\varnothing \neq FixF \subset U$.

Рассмотрим некоторые следствия этого общего результата.

(2.2.8) Теорема. Пусть однозначное отображение $f : \bar{U} \to E$ и псевдоациклическое мультиотображение $F : \bar{U} \to K(E)$ вполне фундаментально сужаемы на существенное фундаментальное множество T и не имеют неподвижных точек на ∂U. Пусть, далее

1) $\gamma_T(i - f, \bar{U}) \neq 0$;

2) $\mu\varphi(x) \notin \Phi(x)$ для всех $\mu < 0$, $x \in \partial U$, где $\Phi = i - F$, $\varphi = i - f$.

Тогда $\varnothing \neq FixF \subset U$.

Доказательство этого утверждения вытекает из Теоремы 1.3.2.

Приведем его аналог для уплотняющих мультиотображений. Пусть E – нормированное пространство и U ограничено.

(2.2.9) Теорема. Пусть непрерывное однозначное отображение f : $\bar{U} \to E$ и псевдоациклическое мультиотображение $F : \bar{U} \to K(E)$ являются (k, β)-уплотняющими относительно вещественной, монотонной, несингулярной, правильной и полуаддитивной МНК β и не имеют неподвижных точек на ∂U. Если $\gamma(i - f, \bar{U}) \neq 0$ и выполнено условие (2) предыдущей теоремы, то $\varnothing \neq FixF \subset U$.

Доказательство. Рассмотрим семейство мультиотображений $G : \bar{U} \times [0, 1] \to K(E)$,

$$G(x, \lambda) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)F(x).$$

Оно является (k, β)-уплотняющим. Действительно, для любого $\Omega \subseteq \bar{U}$

мы имеем

$$\beta(G(\Omega \times [0,1])) \leq \beta(co(f(\Omega) \cup F(\Omega))) =$$

$$= \max\{\beta(f(\Omega)), \beta(F(\Omega))\} \leq k\beta(\Omega).$$

Из Леммы 2.1.12 (2) вытекает, что G является вполне фундаментально сужаемым на некоторое существенное фундаментальное множество T, которое будет таковым и для отображений $G(\cdot, 0) = F$, $G(\cdot, 1) = f$ и мы можем применить предыдущую теорему. ■

(2.2.10) Следствие (Теорема Шефера). Пусть псевдоациклическое мультиотображение $F : \bar{U} \to K(E)$ является (k, β)-уплотняющим относительно вещественной, монотонной, несингулярной, правильной и полуаддитивной МНК β. Пусть

$\mu x \notin F(x)$ для всех $\mu > 1$, $x \in \partial U$.

Тогда $\varnothing \neq FixF \subset \bar{U}$.

(2.2.11) Следствие (Теорема Роте). Пусть мультиотображение $F : \bar{U} \to K(E)$ – такое же как в (2.2.10). Если

$$F(\partial U) \subset \bar{U},$$

то $\varnothing \neq FixF \subset \bar{U}$.

Мы завершим этот параграф теоремой о нечетном поле для уплотняющего псевдоациклического мультиотображения.

(2.2.12) Теорема. Пусть U – абсолютно выпуклая открытая ограниченная окрестность нуля; β – монотонная полуаддитивная МНК в E, инвариантная относительно отражения в нуле. Пусть β-уплотняющее псевдоациклическое мультиотображение $F : \bar{U} \to K(E)$ таково, что

$$FixF \cap \partial U = \varnothing$$

и

$$F(-x) = -F(x)$$

для всех $x \in \partial U$. Тогда

$$\gamma(i - F, \bar{U}) \equiv 1(mod 2)$$

и следовательно $\varnothing \neq FixF \subset U$

Доказательство. Рассмотрим совокупность $\{T_j\}_{j \in J}$ всех фундаментальных множеств мультиотображения F, которые симметричны относительно нуля. Эта совокупность непуста, поскольку она содержит E. Тогда

$$T = \bigcap_{j \in J} T_j$$

является существенным фундаментальным множеством F, симметричным относительно нуля. Действительно, T содержит ноль, поэтому $\bar{U}_T \neq \varnothing$. Далее, нетрудно проверить, что множество

$$\widetilde{T} = \overline{co}(F(\bar{U}_T) \cup (-F(\bar{U}_T)))$$

принадлежит совокупности $\{T_j\}_{j \in J}$ и $\widetilde{T} \subset T$. В силу линейности T имеем

$$T = \overline{co}(F(\bar{U}_T) \cup (-F(\bar{U}_T))).$$

Тогда получаем

$$\beta(\bar{U}_T) \leq \beta(T) = \beta(\overline{co}(F(\bar{U}_T) \cup (-F(\bar{U}_T)))) =$$

$$= \max\{\beta(F(\bar{U}_T)), \beta(-F(\bar{U}_T))\} = \beta(F(\bar{U}_T)),$$

откуда вытекает, что множество $\bar{U}_T$ компактно, а следовательно, и сужение F на $\bar{U}_T$ компактно ([11], Теорема 1.2.35).

Для завершения доказательства остается воспользоваться теоремой о нечетном поле (1.3.10). ■

Глава 3. Топологическая степень совпадения фредгольмовых операторов и псевдоациклических многозначных отображений

1 Основные понятия и определения

Пусть E_1, E_2 – банаховы пространства, $L : DomL \subseteq E_1 \to E_2$ – линейный оператор.

Напомним (см., например, [32], [36]) следующие утверждения.

(3.1.1) Лемма. Пусть $P : E_1 \to E_1$ – линейная проекция такая, что $ImP = KerL$. Тогда:

а) оператор $L_P : DomL \cap KerP \to ImL$,

$$L_p(x) = L(x) \text{ для } x \in DomL \cap KerP$$

является линейным изоморфизмом;

б) оператор $K_P : ImL \to DomL \cap KerP$,

$$K_p(x) = L_P^{-1}$$

удовлетворяет соотношению

$$K_P \circ Lx = x - Px$$

для всех $x \in DomL$.

Оператор K_P называется псевдообратным к L.

(3.1.2) Определение. Линейный оператор $L : DomL \subseteq E_1 \to E_2$ называется линейным фредгольмовым оператором нулевого индекса, если ImL – замкнутое подмножество E_2, пространства $KerL$ и $CokerL =$

E_2/ImL конечномерны и

$$dimKerL = dimCokerL.$$

(3.1.3) Лемма. Пусть $L : DomL \subseteq E_1 \to E_2$ – линейный фредгольмов оператор нулевого индекса. Тогда:

а) существуют линейные непрерывные операторы проектирования $P : E_1 \to E_1$ и $Q : E_2 \to E_2$ такие, что $ImP = KerL$ и $KerQ = ImL$;

б) псевдообратный оператор K_P непрерывен;

в) каноническая проекция $\Pi : E_2 \to CokerL$, заданная как

$$\Pi y = y + ImL,$$

является непрерывным оператором;

г) существует линейный непрерывный изоморфизм $\Lambda : CokerL \to KerL$;

д) уравнение

$$Lx = y,\ y \in E_2$$

эквивалентно уравнению

$$(i - P)x = (\Lambda\Pi + K_{P,Q})(y),$$

где i – тождественный оператор на E_1, а оператор $K_{P,Q} : E_2 \to E_1$ задан как

$$K_{P,Q}(y) = K_P(y - Qy).$$

Пару (P, Q) будем называть точной парой проекций, отвечающих оператору L.

Отметим также, что сужение Π на ImQ является алгебраическим изоморфизмом.

Из результатов предыдущей главы вытекает следующее.

Пусть $\mathcal{E}$ – банахово пространство, β – монотонная несингулярная МНК в $\mathcal{E}$, $\mathcal{U} \subset \mathcal{E}$ – выпуклое ограниченное подмножество, $F : \overline{\mathcal{U}} \to K(\mathcal{E})$ – β-уплотняющее псевдоациклическое мультиотображение такое, что

$$Fix\, F \cap \partial U = \varnothing.$$

Тогда определена целочисленная характеристика – топологическая степень мультиполя $i - F$

$$deg(i - F, \overline{U}),$$

обладающая свойством гомотопической инвариантности и свойством неподвижной точки: условие $deg(i - F, \overline{U}) \neq 0$ влечет

$$\varnothing \neq Fix\, F \subset U.$$

2 Степень совпадения

Пусть $U \subset E_1$ – открытое выпуклое ограниченное множество; β – МНК в E_1. Для простоты будем предполагать, что β обладает указанными выше свойствами (1)-(7) (см. определение 2.1.9).

(3.2.1) Определение. Псевдоациклическое мультиотображение $\mathcal{F} : \bar{U} \to K(E_2)$ называется (L, β)-уплотняющим, если:

(i) множество $\mathcal{F}(\bar{U})$ ограничено в E_2;

(ii) мультиотображение

$$K_{P,Q} \circ \mathcal{F} : \bar{U} \to K(E_1)$$

является β-уплотняющим.

Нашей задачей теперь является построение топологической степени совпадения пары $(L, \mathcal{F})$, где $L : DomL \subset E_1 \to E_2$ – линейный фредгольмов оператор нулевого индекса, а $\mathcal{F} : \bar{U} \to K(E_2)$ – (L, β)-уплотняющее псевдоациклическое мультиотображение.

(3.2.2) Определение. Точка $x \in DomL \cap \bar{U}$ называется точкой совпадения пары $(L, \mathcal{F})$, если

$$Lx \in \mathcal{F}(x).$$

Множество всех точек совпадения пары $(L, \mathcal{F})$ будем обозначать $Coin(L, \mathcal{F}, \overline{U})$.

Рассмотрим мультиотображение $\mathcal{G} : \bar{U} \to K(E_1)$ вида

$$\mathcal{G}(x) = Px + (\Lambda\Pi + K_{P,Q}) \circ \mathcal{F}(x).$$

Из Леммы 3.1.3 (д) вытекает, что множество $Coin(L, \mathcal{F})$ совпадает с множеством неподвижных точек $Fix\mathcal{G} = \{x \in \overline{U} : x \in \mathcal{G}(x)\}$.

Основное свойство мультиотображения $\mathcal{G}$ описывает следующее утверждение.

(3.2.3) Лемма. Мультиотображение $\mathcal{G}$ является β-уплотняющим псевдоациклическим мультиотображением.

Доказательство. (i) Покажем, что $\mathcal{G}$ псевдоациклично. Пусть $\mathcal{F} = (\Theta \circ \widetilde{\mathcal{F}})$, $\widetilde{\mathcal{F}} : \bar{U} \to K(Z)$, $\Theta : Z \to E_2$ – разложение $\mathcal{F}$. Ясно, что мультиотображение $\widehat{\mathcal{F}} : \bar{U} \to K(E_1 \times Z)$,

$$\widehat{\mathcal{F}} = \{x\} \times \widetilde{\mathcal{F}}(x)$$

почти ациклично.

Далее, определим отображение $\Xi : E_1 \times Z \to E_1$ как

$$\Xi(x, z) = Px + (\Lambda\Pi + K_{P,Q})z.$$

Тогда $\mathcal{G}$ разложимо в $\Xi \circ \widehat{\mathcal{F}}$.

(ii) Пусть $\Omega \subset \bar{U}$ – подмножество для которого

$$\beta(\mathcal{G}(\Omega)) \geq \beta(\Omega).$$

Заметим, что

$$\mathcal{G}(\Omega) \subset P(\Omega) + \Lambda\Pi\mathcal{F}(\Omega) + K_{P,Q}\mathcal{F}(\Omega).$$

В силу того, что первые два слагаемых являются ограниченными конечномерными множествами, получаем

$$\beta(\mathcal{G}(\Omega)) \leq \beta(K_{P,Q} \circ \mathcal{F}(\Omega)),$$

откуда, в силу Определения 3.2.1 (ii) вытекает, что множество Ω относительно компактно.

Лемма доказана. ■

Обозначим $S^L(\bar{U}, E_2)$ совокупность всех (L, β)-уплотняющих псевдоациклических мультиотображений $\mathcal{F} : \bar{U} \to K(E_2)$.

Выделим в $S^L(\bar{U}, E_2)$ подкласс $S^L_{\partial U}(\bar{U}, E_2)$, состоящий из всех таких мультиотображений $\mathcal{F}$, для которых

$$Coin(L, \mathcal{F}, \bar{U}) \cap (\partial U \cap DomL) = \varnothing.$$

(3.2.4) Определение. Степенью совпадения

$$deg(L, \mathcal{F}, \bar{U})$$

пары $(L, \mathcal{F})$, где $\mathcal{F} \in S^L_{\partial U}(\bar{U}, E_2)$, называется топологическая степень $deg(i - \mathcal{G}, \bar{U})$ мультиполя $i - \mathcal{G}$.

Нашей задачей теперь является установить корректность Определений 3.2.1 и 3.2.4, то есть их независимость от выбора точной пары проекций (P, Q) и изоморфизма Λ (с точностью до его ориентации).

(3.2.5) Лемма. Пусть (P, Q) и (P', Q') – две точные пары проекций, отвечающих оператору L. Тогда, если мультиотображение $K_{P,Q} \circ \mathcal{F}$ является β-уплотняющим и выполняется условие (i) Определения 3.2.1, то $K_{P',Q'} \circ \mathcal{F}$ – также β-уплотняющее мультиотображение.

Доказательство. Нетрудно проверить следующие соотношения

$$K_{P'} = (i - P')K_P$$

$$PK_{P'} + P'K_P = 0,$$

где K_P, $K_{P'}$ – псевдообратные к L операторы, ассоциированные с P и P' соответственно.

Обозначим $\Pi_Q = \Pi|_{ImQ}$ и $\Pi_{Q'} = \Pi|_{ImQ'}$. Тогда получаем

$$K_{P',Q'} = K_{P'}(i - Q') =$$

$$= (i - P')K_P(i - Q') =$$

$$= (i - P')K_P(i - Q) + (i - P')K_P(Q - Q') =$$

$$= (i - P')K_{P,Q} + (i - P')\tilde{K}_P(\Pi_Q^{-1} - \Pi_{Q'}^{-1})\Pi,$$

где $\tilde{K}_P$ обозначает сужение K_P на конечномерное подпространство $Im(Q-Q') \subset E_2$.

Для $\Omega \subset \bar{U}$, пусть

$$\beta(K_{P',Q'} \circ \mathcal{F}(\Omega)) \geq \beta(\Omega).$$

Тогда получаем

$$K_{P',Q'} \circ \mathcal{F}(\Omega) \subset K_{P,Q}\mathcal{F}(\Omega) - P'K_{P,Q}\mathcal{F}(\Omega) +$$

$$+ (i - P')\tilde{K}_P(\Pi_Q^{-1} - \Pi_{Q'}^{-1})\Pi\mathcal{F}(\Omega).$$

В силу того, что последние два слагаемых представляют собой ограниченные подмножества конечномерного пространства, мы получаем, используя свойства меры некомпактности β,

$$\beta(K_{P',Q'} \circ \mathcal{F}(\Omega)) \leq \beta(K_{P,Q} \circ \mathcal{F}(\Omega)),$$

следовательно,

$$\beta(K_{P,Q} \circ \mathcal{F}(\Omega)) \geq \beta(\Omega),$$

откуда вытекает относительная компактность Ω. ■

Заметим теперь, что если ориентировать конечномерные пространства $KerL$ и $CokerL$, то все изоморфизмы

$$\Lambda : CokerL \to KerL$$

распадаются на два класса $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{L}_1$ гомотопных друг другу изоморфизмов – сохраняющих ориентацию пространств и, соответственно, меняющих ее на противоположную.

(3.2.6) Лемма. Степень совпадения

$$deg(L, \mathcal{F}, \bar{U})$$

не зависит от выбора точной пары проекций (P, Q) и от выбора изоморфизмов Λ в одном и том же гомотопическом классе $\mathcal{L}_i$, $i = 0, 1$.

Доказательство. Пусть (P, Q) и (P', Q') – две точные пары проекций и

$$\Lambda, \Lambda' : CokerL \to KerL$$

– два изоморфизма, принадлежащих одному из классов $\mathcal{L}_0$ или $\mathcal{L}_1$.

Обозначим

$$\mathcal{G}_0(x) = Px + (\Lambda\Pi + K_{P,Q})\mathcal{F}(x),$$

$$\mathcal{G}_1(x) = P'x + (\Lambda'\Pi + K_{P',Q'})\mathcal{F}(x).$$

Пусть $\widetilde{\Lambda} : CokerL \times [0, 1] \to KerL$ – гомотопия, связывающая Λ и Λ', то есть $\widetilde{\Lambda}(\cdot, 0) = \Lambda$, $\widetilde{\Lambda}(\cdot, 1) = \Lambda'$. Известно, что для любого $0 \leq \lambda \leq 1$ отображения

$$P_\lambda = (1 - \lambda)P + \lambda P' \text{ и}$$

$$Q_\lambda = (1 - \lambda)Q + \lambda Q'$$

образуют точную пару проекций(см. [32]). Более того, справедливо следующее соотношение

$$K_{P_\lambda} = (1-\lambda)K_P + \lambda K_{P'},$$

откуда очевидным образом вытекает

$$K_{P_\lambda, Q_\lambda} = K_{P_\lambda}(I - Q_\lambda).$$

Рассмотрим теперь семейство мультиотображений $\mathcal{G} : \overline{U} \times [0,1] \to K(E_1)$,

$$\mathcal{G}(x,\lambda) = P_\lambda x + [\widetilde{\Lambda}(\Pi(\cdot),\lambda) + K_{P_\lambda,Q_\lambda}] \circ \mathcal{F}(x).$$

Нетрудно видеть, что мультиотображение $\mathcal{G}$ псевдоациклично,

$$x \notin \mathcal{G}(x,\lambda)$$

для всех $(x,\lambda) \in \partial U \times [0,1]$ и

$$\mathcal{G}(x,0) = \mathcal{G}_0(x),$$

$$\mathcal{G}(x,1) = \mathcal{G}_1(x).$$

Остается показать, что мультиотображение $\mathcal{G}$ является уплотняющим. Для этого проведем следующие преобразования:

$$\mathcal{G}(x,\lambda) = (1-\lambda)Px + \lambda P'x + [\widetilde{\Lambda}(\Pi(\cdot),\lambda) +$$

$$+\{(1-\lambda)K_P + \lambda K_{P'}\}\{I - (1-\lambda)Q - \lambda Q'\}]\mathcal{F}(x) =$$

$$= (1-\lambda)Px + \lambda P'x + [\widetilde{\Lambda}(\Pi(\cdot),\lambda) + \{(1-\lambda)K_P +$$

$$+\lambda(I-P')K_P\}\{I - Q + \lambda(Q-Q')\}]\mathcal{F}(x) =$$

$$= (1-\lambda)Px + \lambda P'x + [\widetilde{\Lambda}(\Pi(\cdot),\lambda) + (I-\lambda P')K_P(I-Q) +$$

$$+\lambda(I-\lambda P')K_P(Q-Q')]\mathcal{F}(x).$$

Пусть теперь $\Omega \subset \overline{U}$ – множество такое, что

$$\beta(\mathcal{G}(\Omega \times [0,1])) \geq \beta(\Omega).$$

Рассуждая как и выше, мы получаем, что

$$\beta(\mathcal{G}(\Omega \times [0,1])) = \beta(K_P(I-Q)\mathcal{F}(\Omega)) = \beta(K_{P,Q}\mathcal{F}(\Omega)).$$

Таким образом,

$$\beta(K_{P,Q}\mathcal{F}(\Omega)) \geq \beta(\Omega),$$

откуда следует относительная компактность Ω.

Итак, мультиотображение $\mathcal{G}$ порождает гомотопию мультиполей $i-\mathcal{G}_0$ и $i-\mathcal{G}_1$, откуда следует

$$deg(i-\mathcal{G}_0, \overline{U}) = deg(i-\mathcal{G}_1, \overline{U}),$$

что и доказывает лемму. ■

3 Основные свойства степени совпадения

Непосредственно из определения вытекает следующий общий принцип существования точки совпадения.

(3.3.1) Теорема. Пусть $\mathcal{F} : \bar{U} \to K(E_2)$ – (L, β)-уплотняющее псевдоациклическое мультиотображение. Если

$$deg(L, \mathcal{F}, \bar{U}) \neq 0,$$

то

$$\varnothing \neq Coin(L, \mathcal{F}, \bar{U}) \subset U.$$

Для того, чтобы сформулировать следующее свойство, введем понятие L-гомотопии.

(3.3.2) Определение. (L, β)-уплотняющие псевдоациклические мультиотображения

$$\mathcal{F}_0 = \Theta_0 \circ \widetilde{\mathcal{F}_0},$$

$$\mathcal{F}_1 = \Theta_1 \circ \widetilde{\mathcal{F}_1} : \bar{U} \to K(E_2)$$

такие, что

$$Coin(L_i, \mathcal{F}_i, \bar{U}) \cap \partial U = \varnothing,\ i = 0, 1,$$

называются L-гомотопными,

$$\mathcal{F}_0 \underset{L}{\sim} \mathcal{F}_1,$$

если выполнены следующие условия:

а) существуют почти ациклическое мультиотображение $\widetilde{\mathcal{F}} : \bar{U} \times [0, 1] \to K(Z)$ и непрерывное отображение $Q : Z \times [0, 1] \to E_2$ такие, что

(i) $\widetilde{\mathcal{F}}(\cdot, 0) = \widetilde{\mathcal{F}}_0, \widetilde{\mathcal{F}}(\cdot, 1) = \mathcal{F}_1$;

(ii) $\Theta(\cdot, 0) = \Theta_0, \Theta(\cdot, 1) = \Theta_1$;

(iii) для псевдоациклического мультиотображения $G : \bar{U} \times [0, 1] \to K(E_2)$,

$$G(x, \lambda) = \Theta(\widetilde{\mathcal{F}}(x, \lambda), \lambda)$$

выполнено

а) множество $G(\bar{U} \times [0, 1])$ ограничено в E_2;

б) мультиотображение $K_{P,Q} \circ \mathcal{F} : \bar{U} \times [0, 1] \to K(E_1)$ является β-уплотняющим;

в) $Coin(L, G(\cdot, \lambda)) \cap \partial U = \varnothing$ для всех $\lambda \in [0, 1]$.

Имеет место следующее свойство гомотопической инвариантности.

(3.3.3) Теорема. Если

$$\mathcal{F}_0 \underset{L}{\sim} \mathcal{F}_1,$$

то

$$deg(L, \mathcal{F}_0, \bar{U}) = deg(L, \mathcal{F}_1, \bar{U}).$$

Доказательство. Рассмотрим мультиотображение $\mathcal{G} : \overline{U} \times [0, 1] \to K(E_1)$,

$$\mathcal{G}(x, \lambda) = Px + [\Lambda\Pi + K_{P,Q}] \circ \mathcal{F}(x, \lambda).$$

Как и ранее, мы можем установить, что $\mathcal{G}$ –псевдоациклическое β-уплотняющее мультиотображение, причем, в силу условия (iii) (в) Определения 3.3.2

$$x \notin \mathcal{G}(x, \lambda)$$

для всех $(x, \lambda) \in \partial U \times [0, 1]$.

Таким образом, $\mathcal{G}$ порождает гомотопию мультиотображений $\mathcal{G}(\cdot, 0)$ и $\mathcal{G}(\cdot, 1)$, откуда вытекает

$$deg(i - \mathcal{G}(\cdot, 0), \overline{U}) = deg(i - \mathcal{G}(\cdot, 1), \overline{U}),$$

что дает в итоге

$$deg(L, \mathcal{F}_0, \overline{U}) = deg(L, \mathcal{F}_1, \overline{U}).\blacksquare$$

Рассмотрим теперь некоторые применения введенной характеристики к задаче о точках совпадения пары $(L, \mathcal{F})$.

Справедлив следующий вариант теоремы о нечетном поле.

(3.3.4) Теорема. Пусть область U симметрична относительно нуля, мультиотображение $\mathcal{F}$ нечетно на ∂U, то есть

$$\mathcal{F}(-x) = -\mathcal{F}(x) \text{ для всех } x \in \partial U.$$

Тогда степень совпадения

$$deg(L, \mathcal{F}, \bar{U})$$

нечетна и, следовательно,

$$\varnothing \neq Coin(L, \mathcal{F}, \bar{U}) \subset U \cap DomL.$$

Доказательство. В силу линейности операторов P, Λ, Π и $K_{P,Q}$ мультиотображение

$$\mathcal{G}(x) = Px + [\Lambda\Pi + K_{P,Q}] \circ \mathcal{F}(x)$$

нечетно и результат вытекает тогда из теоремы о нечетном поле для псевдоациклического мультиотображения (Теорема 2.2.12). $\blacksquare$

Рассмотрим теперь следующую теорему о продолжении.

(3.3.5) Теорема. Пусть $\mathcal{F} : \bar{U} \to K(E_2)$ – (L, β)-уплотняющее псевдоациклическое мультиотображение такое, что

(i) $Lx \notin \lambda\mathcal{F}(x)$ для всех $x \in DomL \cap \partial U, \lambda \in (0,1]$;

(ii) $0 \notin \Pi\mathcal{F}(x)$ для всех $x \in KerL \cap \partial U$;

(iii) $deg_{KerL}(\Lambda\Pi\mathcal{F}|_{U_{KerL}}, \bar{U}_{KerL}) \neq 0$.

Тогда

$$\varnothing \neq Coin(L, \mathcal{F}, \bar{U}) \subset (U \cap DomL).$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что мультиотображение $\mathcal{G} : \overline{U} \times [0,1] \to K(E_1)$, заданное как

$$\mathcal{G}(x, \lambda) = Px + [\Lambda\Pi + \lambda K_{P,Q}] \circ \mathcal{F}(x),$$

является псевдоациклическим и β-уплотняющим.

Если $\lambda \in (0,1]$, то , принимая во внимание, что $\frac{1}{\lambda}\Lambda$ также является линейным изоморфизмом пространств $CokerL$ и $KerL$, мы получаем из условия (i), что

$$x \notin \mathcal{G}(x, \lambda)$$

для $(x, \lambda) \in (DomL \cap \partial U) \times (0,1]$.

Если же $\lambda = 0$, то из условия (ii) вытекает, что $x \notin \mathcal{G}(x, 0)$ для всех $x \in DomL \cap \partial U$.

Таким образом, $\mathcal{G}$ порождает гомотопию β-уплотняющих псевдоациклических мультиотображений, откуда получаем

$$deg(L, \mathcal{F}, \overline{U}) = deg(i - P - \Lambda\Pi\mathcal{F}, \overline{U}),$$

где в правой части – топологическая степень мультиполя, соответствующего конечномерному отображению $P + \Lambda\Pi\mathcal{F}$. Согласно свойству сужения отображения (2.2.6), мы получаем

$$deg(i - P - \Lambda\Pi\mathcal{F}, \overline{U}) = deg_{KerL}(-\Lambda\Pi\mathcal{F}|_{\overline{U}_{KerL}}, \overline{U}_{KerL}).$$

Применение условия (iii) заканчивает доказательство. ■

Мы завершим этот раздел теоремой о точке совпадения, являющейся обобщением теоремы Б.Н. Садовского о неподвижной точке. Эту теорему мы докажем для мультиотображений более узкого класса, впрочем вполне достаточного для главных приложений.

Дадим необходимые определения.

(3.3.6) Определение. Компактное метрическое пространство A называется R_δ-множеством, если существует убывающая последовательность $\{A_n\}$ компактных стягивающих множеств такая, что

$$A = \bigcap_{n \geq 1} A_n.$$

(3.3.7) Замечание. Всякое R_δ-множество ациклично (см. [33]). Очевидно, что декартово произведение $A \times B$ R_δ-множеств является R_δ-множеством.

Пусть Z – топологическое пространство и $\tilde{F} : \bar{U} \to K(Z)$ – мультиотображение. Определим сингулярное множество $N \subset \bar{U}$ следующим образом:

$$N = \{x \in \bar{U} : \tilde{F}(x) \text{ не является } R_\delta\text{-множеством.}\}$$

Пусть

$$N = \bigcup_{i=0}^{\infty} M^i_{\tilde{F}},$$

где $M^i_{\tilde{F}}$, как и прежде, состоит из всех таких точек $x \in \bar{U}$, для которых $F(x)$ не является i-ацикличным.

(3.3.8) Определение. Полунепрерывное сверху мультиотображение

$\widetilde{F} : \bar{U} \to K(Z)$ называется почти-R_δ-мультиотображением, если множества $M^i_{\widetilde{F}}$ удовлетворяют условиям (a) и (b) Определения 1.1.17.

Соответственно, псевдо-R_δ-мультиотображением мы назовем мультиотображение $\mathcal{F} : \bar{U} \to K(E_2)$, представимое в виде $\widetilde{\mathcal{F}} = \Theta \circ \mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ – почти-R_δ-мультиотображение, а $\Theta : Z \to E_2$ – непрерывное отображение.

(3.3.9) Теорема. Пусть пространство E_1 сепарабельно, множество U симметрично относительно нуля, $\mathcal{F} : \bar{U} \to K(E_2)$ – (L, β)-уплотняющее псевдо-R_δ-мультиотображение, удовлетворяющее следующему граничному условию:

$$(L - \mathcal{F})(-x) \cap \mu(L - \mathcal{F})(x) = \varnothing \tag{3.3.10}$$

для всех $x \in \partial U, \mu \geq 0$.

Тогда степень $deg(L, \mathcal{F}, \bar{U})$ нечетна и, следовательно,

$$\varnothing \neq Coin(L, \mathcal{F}, \bar{U}) \subset U \cap DomL.$$

Доказательство. Рассмотрим мультиотображение $\mathcal{H} : \bar{U} \times [0, 1] \to K(E_2)$, заданное как

$$\mathcal{H}(x, \lambda) = (1 - \frac{\lambda}{2})\mathcal{F}(x) - \frac{\lambda}{2}\mathcal{F}(-x).$$

Это мультиотображение является псевдо-R_δ-мультиотображением. Действительно, его полунепрерывность сверху вытекает из свойств непрерывности мультиотображений (см., например, [?]). Далее, пусть $\mathcal{F} = \Theta \circ \widetilde{\mathcal{F}}$. Представим мультиотображение $\mathcal{H}$ в виде следующей композиции:

$$\overline{U} \times [0, 1] \xrightarrow{\Sigma} Z \times Z \times [0, 1] \xrightarrow{\Theta'} E_2 \times E_2 \times [0, 1] \xrightarrow{\chi} E_2\,,$$

где

$$(x,\lambda) \xrightarrow{\Sigma} \{\widetilde{\mathcal{F}}(x), \widetilde{\mathcal{F}}(-x), \lambda\} \xrightarrow{\Theta'} \{\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(-x), \lambda\} \xrightarrow{\chi} \mathcal{H}(x,\lambda)\,,$$

$$\Theta'(z,z',\lambda) = \{\Theta z, \Theta z', \lambda\}$$

и

$$\chi(v,v',\lambda) = (1-\frac{\lambda}{2})v - \frac{\lambda}{2}v'.$$

Мультиотображение Σ является почти-R_δ. В самом деле, если $\widetilde{\mathcal{F}}(x)$ и $\widetilde{\mathcal{F}}(-x)$ являются R_δ-множествами, то и $\widetilde{\mathcal{F}}(x) \times \widetilde{\mathcal{F}}(-x) \times \{\lambda\}$ – тоже R_δ-множество. Далее, очевидно, что $M^i_\Sigma = M^i_{\widetilde{F}} \cup (-M^i_{\widetilde{F}})$ и, применяя теорему суммы (см. [1]), мы можем убедиться, что множества M^i_Σ, $i \geq 0$ удовлетворяют условиям (a) и (b) Определения 1.1.17.

Покажем теперь, что мультиотображение $\mathcal{H}$ является (L,β)-уплотняющим.

Ограниченность множества $\mathcal{H}(\bar{U} \times [0,1])$ очевидна. Пусть теперь $\Omega \subset \bar{U}$ – множество такое, что

$$\beta(K_{P,Q}\mathcal{H}(\Omega \times [0,1])) \geq \beta(\Omega).$$

Тогда получаем

$$\beta(K_{P,Q}\mathcal{H}(\Omega \times [0,1])) \leq$$

$$\leq \beta[co[K_{P,Q}\mathcal{F}(\Omega) \cup (-K_{P,Q}\mathcal{F}(-\Omega))]] =$$

$$= max\{\beta[K_{P,Q}\mathcal{F}(\Omega)], \beta[K_{P,Q}\mathcal{F}(-\Omega)]\} \leq$$

$$\leq \beta[K_{P,Q}\mathcal{F}(\Omega \cup (-\Omega))].$$

Заметим теперь, что

$$\beta(\Omega \cup (-\Omega)) = \beta(\Omega). \qquad \textbf{(3.3.11)}$$

Тогда из (3.3.10) и (3.3.11) получаем

$$\beta[K_{P,Q}\mathcal{F}(\Omega \cup (-\Omega))] \geq$$

$$\geq \beta[K_{P,Q}G(\Omega \times [0,1])] \geq$$

$$\geq \beta(\Omega) = \beta[\Omega \cup (-\Omega)],$$

откуда следует, что множество $\Omega \cup (-\Omega)$ относительно компактно, а значит и Ω относительно компактно.

Покажем теперь, что

$$Lx \notin \mathcal{H}(x,\lambda) \text{ для всех } (x,\lambda) \in \partial U \times [0,1]. \tag{3.3.12}$$

Если $\lambda = 0$, то $\mathcal{H}(x,0) = \mathcal{F}(x)$ и (3.3.12) при $\lambda = 0$ вытекает из (3.3.10) при $\mu = 0$.

Пусть найдутся такие $x_0 \in \partial U$, и $\lambda_0 \in (0;1]$, что

$$Lx_0 \in \mathcal{H}(x_0,\lambda_0).$$

тогда имеем

$$Lx_0 \in (1 - \frac{\lambda_0}{2})\mathcal{F}(x_0) - \frac{\lambda_0}{2}\mathcal{F}(-x_0),$$

откуда

$$Lx_0 \in (1 - \frac{\lambda_0}{2})y_0 - \frac{\lambda_0}{2}y_0',$$

для некоторых $y_0 \in \mathcal{F}(x_0)$, $y_0' \in \mathcal{F}(-x_0)$.

Но тогда

$$L(-x_0) - y_0' = \frac{1 - \frac{\lambda_0}{2}}{\frac{\lambda_0}{2}}(Lx_0 - y_0),$$

что противоречит условию (3.3.10).

Осталось заметить, что мультиотображение

$$\mathcal{H}(x,1) = \frac{1}{2}\mathcal{F}(x) - \frac{1}{2}\mathcal{F}(-x)$$

нечетно и, тогда, воспользовавшись теоремами о гомотопической инвариантности и о нечетном поле, получаем

$$deg(L, \mathcal{F}, \bar{U}) = deg(L, \mathcal{H}(\cdot, 0), \bar{U}) =$$

$$deg(L, \mathcal{H}(\cdot, 1), \bar{U}) \equiv 1(mod 2).$$

Теорема доказана. ■

Глава 4. О полулинейных дифференциальных включениях с нелокальными граничными условиями

1 Постановка задачи

Мы будем рассматривать полулинейное дифференциальное включение в сепарабельном банаховом пространстве E

(4.1.1) $$y'(t) \in Ay(t) + F(t, y(t)), \qquad t \in [0, T]$$

вместе с нелокальным граничным условием следующего вида

(4.1.2) $$Ly(0) = \varphi(y),$$

где $L : DomL \subseteq E \to E$ - линейный фредгольмов оператор нулевого индекса, $\varphi : C([0, T]; E) \to E$ - непрерывное отображение.

Предполагается, что линейная часть включения (4.1.1) удовлетворяет условию

A) $A : DomA \subseteq E \to E$ - замкнутый линейный оператор, порождающий C_0-полугруппу $e^{At},\ t \geq 0$.

Обозначим $Kv(E)$ совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств E.

Будем считать, что для многозначной нелинейности $F : [0, T] \times E \to Kv(E)$ выполнены условия:

$F1$) мультифункция $F(\cdot, x) : [0, T] \to Kv(E)$ обладает измеримым сечением для каждого $x \in E$;

$F2$) мультиотображение $F(t, \cdot) : E \to Kv(E)$ полунепрерывно сверху для п.в. $t \in [0, T]$;

$F3)$ существует функция $\alpha \in L^1_+([0,T])$ такая, что

$$\|F(t,x)\| := \sup\{\|z\| : z \in F(t,x)\} \le \alpha(t)(1+\|x\|)$$

для п.в. $t \in [0,T]$.

Следующее предположение называется условием χ-регулярности:

$F4)$ существует функция $k(\cdot) \in L^1_+([0,T])$ такая, что

$$\chi(F(t,D)) \le k(t)\cdot\chi(D) \quad \text{a.e. } t \in [0,T]$$

для любого ограниченного множества $D \subset E$, где χ - мера некомпактности Хаусдорфа в E.

Отметим, что частными случаями граничного условия (4.1.2) являются обобщенные периодические задачи

$$Ly(0) = \psi(y(T)), \tag{4.1.3}$$

где $\psi : E \to E$ - некоторое непрерывное отображение и

$$Ly(0) = y(T). \tag{4.1.4}$$

2 Существование решений

Мы будем рассматривать интегральные решения включения (4.1.1), т.е. непрерывные функции $y : [0, T] \to E$ вида

$$y(t) = e^{At}y(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}f(s)ds,$$

где $f(s) \in F(s, y(s))$ п.в. $s \in [0, T]$ - суммируемое сечение.

Справедлива следующая теорема существования решения задачи Коши (Теорема 5.2.2 [35]).

(4.2.1) Теорема. При выполнении условий (A), $(F1)$-$(F4)$ для любого $x_0 \in E$ множество $\Sigma(x_0)$ всех интегральных решений $y(\cdot)$ дифференциального включения (4.1.1), удовлетворяющих начальному условию

(4.2.2) $$y(0) = x_0$$

- непустое компактное подмножество $C([0, T]; E)$. ■

Более того, решения задачи (4.1.1), (4.2.2) обладают следующими топологическими свойствами (см. [35], Следствия 5.3.1, 5.2.2).

(4.2.3) Теорема. При условиях Теоремы 4.2.1 каждое множество $\Sigma(x)$ является R_δ-множеством и мультиотображение $\Sigma : E \to K(C([0, T]; E))$ полунепрерывно сверху. ■

Заметим теперь, что задача (4.1.1) – (4.1.2) сводится к нахождению решения $x \in E$ включения

(4.2.4) $$Lx \in \varphi(\Sigma(x)),$$

или, иначе говоря, отысканию точки совпадения оператора L и мультиотображения $\varphi \circ \Sigma$. Такое мультиотображение, представляющее собой композицию полунепрерывного сверху мультиотображения с R_δ-значениями и непрерывного отображения, называется CJ-мультиотображением. Заметим, что CJ-мультиотображения являются частным случаем псевдоациклических мультиотображений, которые рассматривались в предыдущих главах.

Нам понадобится следующее понятие (см. [35]). Пусть $L : E \to E$ – ограниченный линейный оператор; χ – МНК Хаусдорфа в E; $B \subset E$ – шар единичного радиуса. Число

$$\|L\|^{(\chi)} := \chi(LB)$$

называется χ-нормой оператора L. Эта характеристика обладает следующими свойствами

$$\|L\|^{(\chi)} \leq \|L\|,$$

$$\chi(L\Omega) \leq \|L\|^{(\chi)}\chi(\Omega) \text{ для } \Omega \in P(E).$$

Пусть $U \subset E$ – выпуклое открытое ограниченное подмножество пространства E; β – МНК в E. Для простоты всюду ниже мы будем предполагать, что МНК β обладает свойствами (1)-(7) Определения 2.1.9.

Мы получаем следующий общий принцип разрешимости задачи (4.1.1) – (4.1.2).

(4.2.5) Теорема. Пусть мультиотображение $\varphi \circ \Sigma : \overline{U} \to K(E)$ является (L, β)-уплотняющим и $deg(L, \varphi \circ \Sigma, \overline{U}) \neq 0$. Тогда нелокальная граничная задача (4.1.1) – (4.1.2) имеет решение. ■

Заметим, что из условия подлинейного роста $(F3)$ с помощью априорных оценок вытекает, что множество $\Sigma(\overline{U})$ ограничено в $C([0, T]; E)$. Поэтому, в случае, когда отображение φ переводит ограниченные множества в ограниченные, установление (L, β)-уплотняемости мультиотображения $\varphi \circ \Sigma$ сводится к проверке для него выполнения условия (b) Определения 4.2.4.

Рассмотрим несколько достаточных условий для этого. Наиболее простым из них является, по-видимому, следующее предположение.

φ) отображение φ вполне непрерывно, то есть переводит ограниченные подмножества $C([0,T];E)$ в относительно компактные подмножества E.

Действительно, поскольку $K_{P,Q}$ является ограниченным линейным оператором, то мультиотображение $K_{P,Q} \circ \varphi \circ \Sigma : \overline{U} \to K(E)$ является вполне непрерывным и , следовательно, $(0,\chi)$-уплотняющим относительно МНК Хаусдорфа χ.

Пусть теперь условие (φ), вообще говоря, не имеет места, но справедливо следующее предположение.

$A1$) полугруппа e^{At}, порождаемая оператором A, компактна, то есть линейные операторы e^{At} компактны при каждом $t > 0$.

Заметим, что для выполнения этого требования достаточно предположить, что оператор A имеет компактную резольвенту и полугруппа e^{At} непрерывна по норме при $t > 0$ (см., например, [30]).

Предположим, что отображение φ является композицией непрерывных отображений

$$\varphi = \varkappa_1 \circ \varkappa_0$$

где $\varkappa_0 : C([0,T];E) \to E^m$ задано как

$$\varkappa_0(y) = (y(t_1), \ldots, y(t_m)),$$

где $0 < t_1 < \ldots < t_m \leq T$, $m \geq 1$ – заданные точки, а $\varkappa_1 : E^m \to E$. Например

$$\varkappa_1(z_1, \ldots, z_m) = \sum_{i=1}^{m} a_i z_i,\ a_i \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Из вида интегрального включения (4.1.1) и условия $(A1)$ вытекает, что каждое множество

$$\Sigma(\overline{U})(t_i) = \{y(t_i) : y \in \Sigma(\overline{U})\},\ i = 1, \ldots, m$$

компактно. Но тогда нетрудно видеть, что мультиотображение $\varphi \circ \Sigma$, а следовательно, и $K_{P,Q} \circ \varphi \circ \Sigma$ вполне непрерывны.

Если выполнение условий (φ) или $(A1)$ не гарантировано, то мы можем провести более тонкий анализ, чтобы обеспечить выполнение условия уплотняемости мультиотображения $\varphi \circ \Sigma$. Рассмотрим в качестве примера обобщенную периодическую задачу (4.1.1), (4.1.4).

Сделаем некоторые дополнительные предположения. Мы будем предполагать выполненными условия $(F1)$–$(F3)$, а также условие T-периодичности

$F_T)$ $F(t+T, \cdot) = F(t, \cdot)$ для почти всех $t \in [0, T]$.

Условие χ-регулярности $(F4)$ будем рассматривать в следующей уточненной форме

$F4_g)$ для каждого непустого ограниченного подмножества $\Omega \subset E$ выполнено

$$\chi(F(t, \Omega)) \leq g(t, \chi(\Omega)) \text{ для почти всех } t \in [0, T],$$

где $g : [0, T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – функция типа Каратеодори такая, что $g(t, \cdot) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – неубывающая функция для почти всех $t \in [0, T]$,

$g(t,0)=0$ для почти всех $t \in [0,T]$ и

$$|g(t,v_1)-g(t,v_2)| \le k(t)|v_1-v_2|$$

для всех $v_1, v_2 \in \mathbb{R}_+$ при почти всех $t \in [0,T]$, где $k \in L^1_+([0,T])$.

Отметим, что из условия периодичности (F_T) вытекает, что мы можем продолжить функции $g(t,v)$ и $k(t)$ на $\mathbb{R}_+$ по t.

В ситуации задачи (4.1.1), (4.1.4) отображение φ имеет вид

$$\varphi(y) = y(T).$$

Поэтому мультиотображение $\varphi \circ \Sigma$ есть мультиоператор сдвига $P_T : E \multimap E$,

$$P_T(x) = \{y(T) : y - \text{интегральное решение включения (4.1.1)},\ y(0) = x\}$$

по траекториям дифференциального включения (4.1.1).

Используя теперь теорему об условиях уплотняемости мультиоператора сдвига (Теорема 6.3.1 [35]), мы получаем следующий результат.

(4.2.6) Теорема. Пусть выполнены условия (A), $(F1)$-$(F3)$, $(F4_g)$, а также

$H1)$ полугруппа e^{At} является χ-убывающей:

$$\|e^{At}\|^{(\chi)} \le Ce^{-\gamma t},$$

где $C \ge 1$ и $\gamma > 0$;

$H2)$ нулевое решение скалярного дифференциального уравнения $r'(t) = -\gamma r(t) + Cg(t, r(t))$, $t \ge 0$ экспоненциально устойчиво в том смысле, что $r(t) \le C_1 e^{-\mu t} r(0)$, $t \ge 0$ для любого неотрицательного решения $r(t)$, где $C_1 \ge 1$, $\mu > 0$;

$H3)$ $T > (\frac{1}{\mu}) ln(CC_1)$;

$H4)$ $\|K_{P,Q}\|^{(\chi)} < \frac{e^{\mu T}}{CC_1}$.

Тогда мультиотображение $\varphi \circ \Sigma$ является (L, k, χ)-уплотняющим с коэффициентом

$$k = \|K_{P,Q}\|^{(\chi)} CC_1 e^{-\mu T} < 1.$$

■

Таким образом, при выполнении указанных выше условий, мы можем вычислять степень совпадения $deg(L, \varphi \circ \Sigma, \overline{U})$ с тем, чтобы применить Теорему (4.2.5).

В качестве примера приведем следующее утверждение.

(4.2.7) Теорема. Пусть выполнены условия Теоремы (4.2.6). Пусть $U \subset E$ – выпуклое открытое ограниченное множество; $P_T : E \to K(E)$ – мультиоператор сдвига по траекториям включения (4.1.1), удовлетворяющий следующим условиям:

$P1)$ для любого $x \in DomL \cap \partial U$:

$$P_T(x) \cap \{\mu Lx : \mu \geq 1\} = \varnothing;$$

$P2)$ $0 \notin \Pi P_T(x)$ для всех $x \in KerL \cap \partial U$;

$P3)$ $deg_{KerL}(\Lambda \Pi P_T|_{\overline{U}_{KerL}}, \overline{U}_{KerL}) \neq 0$, где последнее выражение представляет собой топологическую степень CJ-мультиполя, вычисляемую в конечномерном пространстве $KerL$.

Тогда существует решение y обобщенной периодической задачи (4.1.1), (4.1.4) такое, что $y(0) \in U \cap DomL$.

Доказательство. Из Теоремы 3.3.5 вытекает, что

$$deg(L, P_T, \overline{U}) \neq 0$$

и утверждение следует из Теоремы 4.2.5. ■

Список литературы

[1] Александров П.С., Пасынков Б.А. *Введение в теорию размерности/* – М: Наука, 1973.

[2] Аль Обаиди Дж. *Топологическая степень для псевдоациклических многозначных векторных полей*, Вестник ВГУ. Сер. физика, математика, Воронеж. – 2014. – № 2. – С. 95–110.

[3] Дж. Аль Обаиди, В.В. Обуховский, *Топологическая степень для одного класса некомпактных мультиполей в локально выпуклых пространствах,* Вестник ВГУ. Сер. физика, математика, 2014, N 3, 88–98.

[4] Дж. Аль Обаиди, В.В. Обуховский, *Топологическая степень совпадения фредгольмовых операторов и псевдоациклических многозначных отображений,* Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. 2014. Т.19. Вып. 6, 51–68.

[5] Дж. Аль Обаиди, *Об индексе совпадения фредгольмовых возмущений квазиациклических мультиотображений,* Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения XXIV", – Воронеж: ВГУ, – 2013. – С. 68–69.

[6] Дж. Аль Обаиди, *Топологическая степень некомпактных мультиполей в локально выпуклых пространствах,* Материалы международной конференции "Воронежская зимняя математическая шко-

ла С.Г. Крейна", – Воронеж: Издательско-полиграфический центр "Научная книга", – 2014. – С. 26–27.

[7] Дж. Аль Обаиди, *Некоторые теоремы о неподвижной точке для многозначных отображений,* Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения XXV", – Воронеж: Издательско-полиграфический центр "Научная книга", – 2014. – С. 55–56.

[8] Дж. Аль Обаиди, *О степени совпадения для фредгольмовых возмущений псевдоациклических мультиотображений,* Актуальные направления научных исследований XXI века: Теория и практика. Сборник научных трудов по материалам международной заочной научно-практической конференции, – 2014. N 4 часть 2 (9-2), – С. 431–434.

[9] Дж. Аль Обаиди, В.В. Обуховский, *О нелокальных граничных задачах для полулинейных дифференциальных включений,* Сборник научных трудов по материалам международной заочной научно-практической конференции "Актуальные направления научных исследований XXI века: Теория и практика", – 2014. N 5 часть 2 , – С. 243–244.

[10] Ахмеров Р.Р., Каменский М.И., Потапов А.С., Родкина А.Е., Садовский Б.Н., *Меры некомпактности и уплотняющие операторы*, Новосибирск, Наука, 1986.

[11] Борисович Ю.Г. *Об одном применении понятия вращения векторного поля*/ ДАН 153:1. – 1963. – С. 12–15.

[12] Борисович Ю.Г. *Об относительном вращении компактных векторных полей в линейных пространствах*/ Труды сем. по функц. анализу, Воронеж. – 1969. – Вып.12. – С. 3–27.

[13] Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. *Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений*/ УМН 35:1. – 1980. – С. 59–126.

[14] Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. *Многозначный анализ и операторные включения*, Итоги науки и техники. Соврем. пробл. мат. Новейшие достижения. Т. 29, ВИНИТИ, М., 1986, 151-211.

[15] Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. *Многозначные отображения*/ Итоги науки и математики. Матем. анализ. Т.19 ВИНИТИ, –М: – 1982.– С. 127–231.

[16] Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. *Введение в теорию многозначных отображений.* Изд. 2е, испр. и дополн., М., Либроком, 2011.

[17] Дольд А. *Лекции по алгебраической топологии*/ –М: Мир, –1976.

[18] С.В. Корнев, В.В. Обуховский, *О некоторых вариантах теории топологической степени для невыпуклозначных мультиотображений,* Труды матем. ф-та (новая серия), Воронеж, ВорГУ, 8(2004), 56-74.

[19] Израилевич Я.А. *О понятии относительного вращения многозначного векторного поля*/ Труды сем. по функц. анализу, Воронеж. – 1969. – Вып.12. – С. 111–115.

[20] Израилевич Я.А., Обуховский В.В. *Об эквивариантных многозначных отображений*/ ДАН СССР 205, 1. – 1972. – С. 16–18.

[21] Израилевич Я.А., Обуховский В.В. *О некоторых топологических характеристиках эквивариантных многозначных отображений*/ Труды матем. ф-та ВГУ, Воронеж. – 1973. – Вып.10. – С. 52–61.

[22] Красносельский М.А., Забрейко П.П. *Геометрические методы нелинейного анализа*, М., Наука, 1975.

[23] Обуховский В.В., Скалецкий А.Г. *Некоторые теоремы о продолжении непрерывных отображений*/ Сиб. мат. ж. – 1982. – 23. №4 – С. 137–141.

[24] Робертсон А., Робертсон В., *Топологические векторные пространства*, М., Мир, 1967.

[25] Скляренко Е.Г. *О некоторых приложениях теории пучков в общей топологии*/ УМН 19:6. – 1964. – С. 47–70.

[26] Спеньер Э. *Алгебраическая топология*/ – М: Мир, – 1971.

[27] Стинрод Н., Эйленберг С. *Основания алгебраической топологии*/ – М: Физматгиз, – 1968.

[28] Begle E.G. *The Vietoris mapping theorem for bicompact spaces*/ Ann. of Math. 51:2 – 1950. – P. 534–543.

[29] Eilenberg S., Montgomery D. *Fixed point theorems for multi-valued transformations*/ Amer. J. Math. 68 – 1946. – P. 214–222.

[30] K.-J. Engel, R. Nagel, *A Short Course on Operator Semigronps,* Berlin, Springer, 2006.

[31] D. Gabor, W. Kryszewski, *A coincidence theory involving Fredholm operators of nonnegative index.* Topol. Methods Nonlinear Anal. 15 (2000), no. 1, 43–59.

[32] R.E. Gaines, J.L. Mawhin, *Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations.* Lecture Notes in Mathematics, no. 568, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.

[33] Górniewicz L. *Topological fixed point theory of multivalued mappings/* Second Edition. Springer, Dordrecht – 2006.

[34] D. M. Hyman, *On decreasing sequences of compact absolute retracts.* Fund Math. 64 (1969), 91-97.

[35] Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. *Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces/ Walter de Gruyter*, Berlin New York – 2001.

[36] J. Mawhin, *Topological Degree Methods in Nonlinear Boundary Value Problems.* Expository lectures from the CBMS Regional Conference held at Harvey Mudd College, Claremont, Calif., June 9–15, 1977. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 40. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1977.

[37] V. Obukhovskii, P. Zecca, N.V. Loi, S. Kornev, *Method of Guiding Functions in Problems of Nonlinear Analysis.* Lecture Notes in Math. V. 2076.– Berlin: Springer, 2013.– 177 p.

[38] T. Pruszko, *A coincidence degree for L-compact convex-valued mappings and its application to the Picard problem of orientors fields.* Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. 27 (1979), no. 11-12, 895-902 (1981).

[39] E. Tarafdar, S.K. Teo, *On the existence of solutions of the equation $Lx \in Nx$ and a coincidence degree theory.* J. Austral. Math. Soc. Ser. A 28 (1979), no. 2, 139-173.

[40] Vietoris L. *Über den hogeren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen*/ Math. Ann. 97 – 1927. – P. 454–472.